



## نص محاضرات الأسبوع الثامن من مساق "التفكير الفعّال من خلال الرياضيات"

الأُسبوع الثامن:	تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطّاطية
المحاضرة ١:	عالم مطّاطي
الموضوع ١:	تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطّاطية

أهلاً وسهلاً. يسرّني أن نتابع الدرس اليوم، واليوم سنتحدّث عن أحد المواضيع المفضّلة لدي على الإطلاق. وذلك لأنني أعتبر أنّه فعلاً يجسّد مسألة التفكير بأفكار جديدة. تذكّر أنّ هذا أحد أهداف هذا المساق، أن تفكّر وتعتقد عزيمة على ابتداع الأفكار الجديدة. برأيي أنّ إحدى أفضل الطرق لابتداع أفكار جديد هي التالية. أنظر إلى العالم الذي نعرفه، وتصور أن إحدى سماته قد تغيّرت. اختلفت إحدى سماته عمّا هي في الواقع فعلاً. ثمّ نستكشف عواقب هذا الواقع المتغيّر. وإذا نظرنا إلى حالة العالم وكيف ستكون العلاقات وغيرها في عالم مختلف، وكانت نظرنا متماسكة، فذلك سيمنحنا مجموعة كاملة من الأفكار الجديدة.

إذاً اليوم سنناقش مسألة تخصّ الهندسة، لكن في عالم حيث الهندسة مختلفة بعض الشيء عن الهندسة في العالم الذي نعرفه فعلاً. فلنتخيّل تحديداً أنّ العالم مصنوع من مواد مطاطية جداً. يمكننا مدّ كل شيء. يمكن لأيّ شيء. يمكن تكبير الأمور وتصغيرها كما تشاء، لكن توجد فيه بعض القواعد. فالأمور ليست سائبة. تنطبق بعض القواعد وهي أنّه لا يجوز لك أن تمرّق أي شيء. ولا يحقّ لك أن تلتصق الأشياء ببعضها البعض. بعبارة أخرى، لنقل أنّ لديك دائرة تستطيع التحكم بتلك الدائرة، تستطيع لفّها ولّيّها ومدّها. يمكنك تكبيرها إلى حجم القمر. تستطيع تصغيرها، لكن لا تستطيع تحويلها إلى شكل الرقم ثمانية بالإنجليزية عبر جمع نقطتين معاً. كما لا تستطيع أن تقصّها وتحوّلها إلى خط مستقيم. لكن لنفهم بتشبيه هذا العالم بعالم من الأوراق المطاطية، كالأشرطة المطاطية، حيث يمكن مدّ الشريط المطاطي، فهو يحافظ على شكله الهندسي نوعاً ما إلا إذا انقطع. إنّهُ يتّسم بنوع من التماسك الهندسي. وما سنكتشفه هو كيف ستكون الهندسة في هذا العالم المطاطي الغريب؟ حسناً سنبدأ من هنا، يسرّني أن أعرفك باثنتين من تلميذاتي اليوم وهما تلميذتان رائعتان. أعرفك بجولي.

مرحباً.

وكاثلين. ألقى التحية، كاثلين.

مرحباً.

حسناً، جيد جداً. هل أنتما على استعداد لاكتشاف عالم مطاطي؟

طبعاً.

عالم ليّن؟

نعم.

ما رأيكما بذلك؟ هل يسعدكما التفكير بكرة يمكن نفخها لتصبح بحجم القمر؟

هذا مفاجئ.

مفاجئ، أحسنت. أحسنت. إذاً فلنحاول أن نجد بعض المفاجآت الأخرى.



الأُسبوع الثامن:	تعلم الهندسة بواسطة أوراق مطاطية
المحاضرة ١:	عالم مطاطي
الموضوع ٢:	مناقشة الدوائر والمثلثات

إذا ما سأفعله هو أنني سأرسم بعض الصور لكما وسأطرح عليكما بعض الأسئلة حول ما إذا كانت الصورة تشبه صورة أخرى أو لا بحسب قواعد هذا العالم المطاطي. بعبارة أخرى، هل يمكن مدّ الأشكال وليها لتبدو كشكل آخر أو لا؟

إذاً هيّا لنبدأ. سأرسم دائرة.

هذه دائرة جميلة.

وهذه أيضاً دائرة -- أول سؤال هو هل الدائرتان متشابهتان؟

نعم. نعم. نعم مبدئياً.

إنهما متشابهتان. إنهما متشابهتان، مع أنّ واحدة أصغر من الأخرى، يمكن مدّ الثانية لتشبه الأولى صح؟

لنرسم مثلثاً الآن. سأسألكما الآن، هل يشبههما هذا الشكل أم لا؟ هل هو مشابه؟ أو مختلف؟

مختلف.

هل قلتَ مختلف؟

نعم.

حسناً. ما رأيك؟

أشعر بأنك تستطيع جعلهما متشابهين

جيد. لدينا اختلاف في الآراء.

هذا رائع. أنتِ تقولين إنهما مختلفان.

نعم.

وأنتِ تقولين إنهما متشابهان.

نعم.

حسناً. إذاً نحاول هنا أن نبتكر مفهوماً. وما نعنيه بابتكار المفاهيم هو أن نبرهنها، أن نحدّد المعايير بوضوح.

كنت أتحدّث عموماً أننا إذا مدّينا شيئاً، نستطيع تحويل شكله. والآن يجب علينا أن نبرهن ذلك لكي نبث في

هذا الخلاف بينكما. مفهوم؟

إذاً فلنناقش الموضوع لنبدأ بالحسنات والسيئات. لمَ تظنّين إنهما متشابهان؟

أعتقد إنهما متشابهان لأنك إذا وسّعتهما تستطيع توسيعهما إلى حد يمكن تحويل النقاط في المثلث لتشكّل

دائرة.

حسناً.

هذا رأيي.

حسناً. ما رأيك يا جولي؟

إذاً لا يزال الشكل ذاته. على فكرة، يمكننا التفكير بالأمر من هذه الناحية. أفكّر بالمسألة أحياناً على أنّها

مجموعة من الجزئيات المتّصلة بجزئيات بجوارها بحيث أنّ كل جزيء هنا متعلّق بالجزئيات بجواره. ويمكن

إبعاد الجزئيات عن بعضها البعض أو تقريبها من بعضها البعض. ويمكن ليّها. لكنها لا تنكسر.



طَيِّب.

إذاً كلها متشابهة. إذاً سنعتقد أنّها جميعها متساوية في هذا العالم المطاطي. وإذا ترعرعتما في عالم حيث يمكن ليّ كل شيء، إذا رأيتما هذا، وإذا رأيتما ذلك، ستقولان إنّهما متشابهان، لأنّنا نستطيع مدّهما في بعضهما البعض. حسناً.

إذاً سننتفّق جميعنا على أنّ كل هذه الأشكال متشابهة. سأطرح عليكما الآن سؤالاً آخر. لنفترض أنّ لدينا دائرة يتّصل بها خط. إذا أنت في المنزل سأطرح عليك السؤال ذاته الذي أطرحه على كاثلين وجولي، ما رأيك؟ هل الشكلان متشابهان أم مختلفان؟ في هذا العالم المطاطي واللين، هل تستطيع أخذ هذه الدائرة وتحويلها إلى دائرة يتّصل بها خط؟



الأُسبوع الثامن:	تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطّاطية
المحاضرة ١:	عالم مطّاطي
الموضوع ٣:	كم تبلغ سماكة الدائرة؟

إذا لنرى. ما رأيكما؟ لنرى ما رأيكما. ما رأيكما؟  
أشعر أنه من الناحية التقنية، يمكن مدهما، نعم، يمكن إخراج شيء منها عند الطرف.  
كيف تمدين الشكل؟  
نأخذ النقاط عند الأطراف نمّد كل شيء، ويبقى لنا جزء نستطيع تحويله إلى خط.  
حسناً. سوف أطلب منك أن ترسمي صورة متحرّكة لهذا الشكل بعبارات أخرى، ابدئي بدائرة واطهري لي ما تعينه بالمدّ.  
حسناً. هذه تصبح أكبر.  
ماذا حصل هنا؟  
تقترب هاتان النقطتان، وتظهر هذه الفجوة.  
لم أفهم. هل تفعلين هذا؟ هل ترسمين شكل v، كهذا؟  
نعم.  
حسناً. ثمّ هل تسحقين هذين الجزئين معاً؟  
نعم.  
فهمت. طيّب. هل تستطيعين عدم القيام بذلك؟  
كلا، لأننا عندها نأخذ نقطتين لا تلامسان بعضهما البعض، ونقرّيهما من بعضهما البعض. نلصقهما معاً ونضعهما فوق بعضهما البعض.  
حسناً. وهذا يخالف القوانين. تستطيعين مدّ الأشكال. في الواقع، لو فكّرت بهذه العلاقة واحد لواحد تأخذين نقطتين وتضعينهما فوق بعضهما البعض فتكون العلاقة من ٢ إلى ١. ولا يحقّ لنا سحق النقطتين ببعضها البعض. من المفيد أنك ذكرت هذا الموضوع، لأنّ الكثير من الناس قد يفكّرون بهذا الأمر. إذا ما رأيك؟ لنصوّت مجدداً. فلنعدّ إلى السؤال الأساسي ونفهم السؤال. السؤال هو. لنفترض أنّ لدينا دائرة يتّصل بها خط. هل هي مشابهة أو مختلفة في هذا العالم المطاطي اللين عن دائرة لا يتّصل بها شيء؟  
أعتقد أنّها مختلفة، لأنك في هذا العالم إذ كنت تستطيع تحريك ومدّ كل شيء، من المفترض أن تكون ما أظهرته، لكن ممدودة أكثر. لا أظنّ بأنك تستطيع أن تُخرج شكلاً ما من الدائرة. لا أعرف فعلاً كيف أفسّر هذا، لأنني محتارة حول ماهية هذا الخط. إنّه مجرد خط مستقيم.  
إنّه مجرد خط مستقيم؟  
أنا شخصياً لا أظنّ بأنهما متشابهتان أبداً. لأنك لا تستطيع أن تُخرج شكلاً من الدائرة انطلاقاً من هذه الدائرة فقط تستطيع مدها قدر ما تشاء. لكن لا تستطيع أن تجعل خطأ يخرج منها.  
حسناً. ما رأيك؟  
أرى أنّهما مختلفان الآن.  
مختلفان؟  
نعم.



حسناً. وما الذي يجعلهما مختلفين؟  
كما سبق وذكرت، إنَّها علاقة واحد لواحد

نعم

إذا رسمت خطأً مستقيماً، يكون له نقطة واحدة فقط.

نعم.

ولا أستطيع التفكير بتشكيل خط مستقيم إلا بوضع واحدة فوق الأخرى. وهكذا يكون التناظر بنسبة ٢ إلى ١.  
حسناً. إذاً لا تستطيعين التفكير بأي طريقة. لذلك تميلين إلى القول إنَّهما مختلفان. إذاً أنتما الاثنتان تريان أنَّهما مختلفتان؟

نعم.

تعتقدان أنَّهما مختلفتان. لنعالج هذه المسألة بمزيد من التفاصيل، لأنَّ السؤال الذي طرحته عليكما لم يكن مصاعاً جيداً. وأعتقد أنني لم أصغه جيداً لأنني لم أشرح فعلاً ما أعنيه بالدائرة وما أعنيه بالخط المستقيم. إذا كُنَّا نعالج مسائل تخصَّ الهندسة، الهندسة المجردة. عندما نتحدَّث عن دائرة، نتحدَّث فعلاً عن فكرة.

طيب.

لا يوجد فعلاً دائرة بسماكة لا متناهية.

طيب.

إذاً قد نكون نتحدَّث عن تلك الدائرة. أو قد نكون نتحدَّث عن الدائرة السميكة الفعلية التي رسمتها هنا. لكي نراها، يجب أن تكون سميكة بعض الشيء. إذاً سأسألكما. لنرى إن كُنَّا نستطيع تمييز هذين السؤالين المختلفين. لنفترض أنَّ السؤال الذي أطرحه يتعلَّق بهذه الدائرة السميكة التي تتميز بسماكة ما. وقد أرسَمها هكذا، لتصبح أسمك، أسمك فعلاً حتَّى أن عرضها يصبح أكبر. لا نتحدَّث عن تجريد دائرة رفيعة. بل دائرة سميكة فعلاً. أتظنَّان أنَّها هي ذاتها الدائرة السميكة التي يتصل بها خط؟ هل هما متشابهتان أم لا؟



الأُسبوع الثامن:	تعلم الهندسة بواسطة أوراق مطاطية
المحاضرة ١:	عالم مطاطي
الموضوع ٤:	العالم المطاطي

برأيي، أعتقد أنّ الشكل سيبقى مختلفاً، مثل الدائرة الرقيقة. إذا كنت تعني هذا العالم المطاطي وتلمّح إلى الشريط المطاطي، فسماعة الشرائط المطاطية تتفاوت وكيفما نظرنا إلى هذه المسألة، أعتقد أنّها ستبقى مختلفة عن -- لا أعرف.

هذا غريب.

حيرتني فكرة الخط المتصل بالدائرة وفكرة أنّ السماكة تغيّر المعادلة. لا تزال الحيرة تنتابني

حسناً، حسناً. وأنت ما رأيك يا جولي؟

نعم أنا أوافقها الرأي. لا أرى كيف يمكن للسماكة أن تؤثر على --

أن تترك أي تأثير؟

نعم.

حسناً، على فكرة تذكّرنا أننا في هذا العالم المطاطي نستطيع أن نأخذ شكلاً ونجعله أكبر. عندها لن تكون الدائرة السميكة نسخة مكبرة عن الدائرة الرفيعة؟

حسناً إذا كان لديك دائرة سميكة، تستطيع زيادة السماكة بمدّها. صح؟

نعم. ممتاز، فلنتحدّث الآن عن الدائرة الأسمك. يصعب لفظ عبارة دائرة أسمك. أتعرفان ما أعنيه؟

أسمك.

أسمك.

أسمك. نعم، صحيح. إذاً اسمها لي أن أطرح هذا السؤال. لنفترض أنّ لدينا هذه الدائرة الأسمك. هل نستطيع

جعل هذا الجزء أسمك هنا، أسمك من الجزء الآخر؟

أظنّ نعم.

نعم.

صحيح لأننا نستطيع مدّ أي جزء نشاء من الدائرة. أخبراني الآن هل تظنّ أنّ الدائرة التي يتّصل بها خط،

الدائرة الأسمك التي تشمل خطوط مشابهة أم مختلفة؟



الأُسبوع الثامن:	تعلم الهندسة بواسطة أوراق مطاطية
المحاضرة ١:	عالم مطاطي
الموضوع ٥:	دائرة من دون عرض

أعتقد أنّهما قد تكونان متشابهتين لأنك تستطيع زيادة سماكة نقطة واحدة من ذلك الخط المستقيم. حسناً، لكن لن يقتصر ذلك على نقطة واحدة. سيكون لديك كمية كبيرة من الأشياء، وتستطيعين سحبها. إذاً تستطيعين تحويل هذا الشكل، لديك هذه الدائرة السميكة. بما أنّ لديك كمية من المواد هنا تستطيعين زيادة سماكة هذا القسم. وإضافة وصلة صغيرة إليه. أتريين ما أعنيه؟

نعم.

فلنعد الآن إلى هذا السؤال. نعم، هل هما متشابهتان؟

نعم.

نعم. حسناً، يمكننا أيضاً تطويل الشكل أكثر حتى. إذا كانت الدائرة عريضة بعض الشيء، يمكننا أن نسحب قسماً منها. يمكننا سحب قطعة منها أو عدة قطع باتجاهات مختلفة، وتبقى هي ذاتها. حسناً هذا جيد. هذه مسألة واحدة. لكنني عندما طرحت هذا السؤال في البداية عن الدائرة التي يخرج منها خط، ربّما كنتما تفكران، كما كنت أفكر أنا، بالعرض المجرد، الغرض المجرد الذي يتّسم برقّة لامتناهية، وهذا الخط، هذا الخط المستقيم يتّسم برقّة لامتناهية. ليس غرضاً سميكاً. إنّهُ فكرة مجردة، مجرد فكرة. ولا يمكن زيادة سماكته تحديداً لأنّ لديه-- إنّهُ بمثابة خط واحد من الجزيئات التي لا تتّسم بأي عرض وبالتالي لا يمكن زيادة سماكته. إذاً سؤالي الآن هل تعتقدان أنّ هذه الدائرة، هذه الفكرة المجردة من الدائرة ذات الخط المستقيم، هل هي مشابهة أو مختلفة عن فكرة الدائرة المجردة؟ بعبارة أخرى، الدائرة كما نفكر بها في مجال الهندسة، حيث لا تكون حقيقية، بل مشابهة. إذاً هذا هو سؤالي التالي. انظروا ما فعلنا هنا. ما فعلناه هو أننا أوضحنا هذه المسألة، صح؟ عندما طرحت في بادئ الأمر هذا السؤال عن الدائرة التي يتّصل بها خط، في الواقع إنّها تتّسم ببعض السماكة، وإلا لما كانت مرئية. إذاً في ذلك العالم الذي رأيناه الآن، تستطيع فعلاً سحب ما يبدو كخط مستقيم، خط سميك يخرج منها. أمّا إذا كنّا نتحدّث عنها في هذا العالم المجرد -- وهذا ملفت، على فكرة، من الملفت أنّنا نستطيع التفكير بهذا العالم المجرد. يمكننا أن نتصوّر في ذهننا فكرة أنّها مجرد دائرة رقيقة إلى ما لانهاية، لا بأس في ذلك. نستطيع معالجة هذه المسألة. هذا هو السؤال الذي توصلنا إليه.

يبين هذا المثال مرة أخرى أنّ إحدى الطرق الأساسية لمعرفة العالم هي أن نتكلّف عناء استيضاح السؤال وتكريس الجهد والوقت لتوضيحه قدر المستطاع. وعندما يظهر الغموض، كما حصل هنا، أن نستكشف الخيارين. نعرف فعلاً نتائج التفكير بالأمر في حال كان سميكاً أم غير سميك عوضاً عن تجاهل هذا التباين المحتمل.

هذا رائع

إذا نعود الآن إلى السؤال الآخر الدائرة ذات الخط. هل هي مشابهة للدائرة العادية أو مختلفة عنها؟ وإذا كانت الإجابة نعم، علينا أن نعرف السبب، وإذا كانت الإجابة كلا، علينا أيضاً أن نعرف السبب.



الأُسبوع الثامن:	تعلم الهندسة بواسطة أوراق مطاطية
المحاضرة ١:	عالم مطاطي
الموضوع ٦:	إحراز التقدّم

سنحاول الآن أن نقرّر ما إذا كان هذان الشكلان متشابهين أو مختلفين. يمكن التفكير بالمسألة بهذه الطريقة. لنفترض أنّك حشرة أنّك حشرة رقيقة إلى ما لانهاية -- وأنّ هذا هو عالمك، الدائرة التي يتّصل بها خط. أو أنّك حشرة في هذا العالم الذي يقتصر على هذه الدائرة. أثناء التنقّل في هذا العالم، هل تلاحظين أي فارق بين هذين العالمين؟ إذا كنت تعيشين من خلال هذه الحشرة التي تسير على الخط المستقيم، ألنّ تتمكني من رؤية أنّ العالم ليس بجوارك؟ أنت لا تستطيعين الرؤية خارج عالمك. هذا عالمك برمّته، لا تستطيعين أن تزيّ خارجة. إذا هما متشابهان برأيي. ما رأيك؟

إذا أنا حشرة في هذه الدائرة -- إمّا في هذا العالم، الذي يتّخذ شكل دائرة، أو في هذا العالم -- الدائرة التي يتّصل بها خط. وأنا أسير -- أستطيع أن أسير حولها.

وأنتِ تسيرين -- هل تستطيعين أن تحدّدي من دون أن تتمكني من الرؤية خارج ذلك العالم -- كل ما تزيّنه هو ما في داخله -- هل تستطيعين أن تزيّ ما إذا كنت داخل هذا العالم أم ذاك؟ إذا طبّقنا ما ناقشناه سابقاً، ما قلته عن أنّهما مختلفان، ألا يعني ذلك أنّك تستطيعين ملاحظة الفرق؟ ما الفرق الذي ستلاحظينه؟ ما الفرق الذي تلاحظينه إذا كنت في هذا العالم عوضاً عن ذلك؟

في هذا العالم، أظنّ أنّني إذا كنت أسير حوله، ووصلت إلى هذه النقطة، سأرى أنّه لا يوجد اتجاه واحد معاكس لها. لكن في هذه النقطة لا يوجد أي اتجاه. نعم.

حسناً. حسناً. إذاً بعبارات أخرى هذه النقطة هنا تبدو مختلفة بالنسبة لك.

نعم.

حسناً. إذاً إن كنت حشرة في هذا العالم، وكنت عند هذه النقطة، كم من اتجاه يكون متاحاً أمامك؟ اثنان.

عند هذه النقطة. يختلف الأمر بحسب الاتجاه. لكن -- إذا كنت تقفين هناك. ثلاثة. تستطيعين سلوك ثلاثة اتجاهات. تستطيعين الذهاب من هنا أو من هنا أو من هنا. ماذا عن هذا العالم؟ يكون لديك اتجاهان فقط. في كل مكان.

نعم.

صح؟

نعم.

إذاً يوجد اختلاف. هنا، في كل مكان، يمكنك الذهاب باتجاهين فقط. في هذا العالم، عند هذه النقطة لديك ثلاثة اتجاهات. ومع ذلك كيفما غيّرت معالم هذا العالم، سيبقى لديك ثلاثة اتجاهات مهما غيّرت معالمه. وفي هذا العالم، لا يهم كيف تتغيّر معالمه، يبقى لكل نقطة اتجاهان.

هل تستطيعين التفكير بفارق آخر بين هذين العالمين؟

إذا كنت عند هذه النقطة، لديك اتجاه واحد فقط، بينما في هذا العالم، لدينا اثنان دائماً.

اثنان دائماً.



اثنتان دائماً.

هذا صحيح تماماً. هذه نقطة أخرى مميزة. نقطة لا تظهر هنا -- نقطة مختلفة. إذاً هذا فارق. على فكرة، هناك سمة أخرى لهذه النقطة هنا - النقطة ذات الاتجاهات الثلاثة. لنفترض أننا أزلنا هذه النقطة. في الواقع لنفترض أننا أزلنا أي نقطة من هذه القطعة، حتى هذه النقطة هناك. ماذا يحدث؟

إذاً أنت تزيل هذه النقطة هنا.

نعم، ربّما لن أختار هذه النقطة.

ماذا عن هذه النقطة؟

لا يهمّ. ماذا يحدث؟

إذا أزلنا هذه النقطة، ألن تصبح الدائرة غير كاملة؟

صح.

صح. إذاً، هنا مثلاً، الدائرة دائماً متواصلة. لكن إذا وصلت إلى هذه النقطة، عليّ أن أعود أدراجي.

هذه نقطة أخرى فالاتجاه واحد. ولنفترض أننا أزلنا هذه النقطة هنا ماذا يحصل للشكل؟

يبقى هو ذاته. يصبح الخط المستقيم أقصر وحسب.

لكن إذا أزلتها ماذا يحدث؟

تنقطع الدائرة.

صح.

صح؟

بالتالي، إذا أزلت هذه النقطة أو تلك، كم قطعة يتبقى لديك؟

اثنتان.

صحيح.

ماذا عن النقاط هنا؟ ماذا يحصل إن أزلت هذه النقطة؟ ألن يبقى الشكل واحداً؟

صح.

صح.

صح.

صح. نعم. أفهمت؟

نعم.

إذاً هل يُعتبر ذلك فارقاً آخر؟ لأنّ هذه تحتوي على بعض النقاط، عند إزالتها تنقسم إلى نصفين. أمّا هذه، إذا أزلت أي نقطة منها تبقى قطعة واحدة.

إذاً كل هذه طرق لنبرهن هذه الفكرة أنّهما شكلان مختلفان. لأنك إذا استعطت مدّ هذا الشكل وليّه وجعله يبدو كهذا الشكل، عندها الأمور كالنقاط التي تنقسم إلى اثنين يجب أن تحافظ على المزايا ذاتها. مدّ الشيء لا يحدث تغييراً

إذا أزلته، على كم قطعة تحصل؟

حسناً.

طيب.

نعم. إذاً اتّضحت لنا الفكرة نوعاً ما.

نعم. طبعاً.

فعلاً.



نعم.  
كلا، كلا، حتماً، حتماً.



الأُسبوع الثامن:	تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطاوية
المحاضرة ٢:	استكشاف أحرف الأبجدية
الموضوع ١:	توبولوجيا أحرف الأبجدية

في الواقع، أظنّ أنّي الآن سأطلب منكما النظر إلى أحرف الأبجدية هذه. لدينا هنا أحرف الأبجدية، مكتوبة بترتيب، بأحرف كبيرة. أحرف الأبجدية، من A إلى Z، مكتوبة بترتيب. وهذا هو السؤال، في هذا العالم اللّين، أي أحرف متشابهة وأيها مختلفة؟ هذا تمرين رائع.

لنبدأ بحرف معيّن لنتمرّن، ولنرى إن كنّا سنجد حرفاً آخر مشابهاً. لنبدأ بالحرف C، وسأضع خطأً تحته لكي نرتّب الأرقام. سأضع علامة واحدة تحت كل الأحرف التي تشبه الحرف C في هذا العالم اللّين. حسناً.

هل يوجد حرف آخر يشبه الحرف C تماماً، في هذا العالم اللّين.

O. هل أستطيع أن أطرح سؤالاً؟

نعم، تفضّلي.

هل نستطيع -- أفهم ما تقوله -- هل نستطيع وصل الخطوط؟ ما رأيك؟

حسناً، كلا. كلا لا نستطيع وصل هذه الخطوط، لأنّ ذلك يتطلّب أخذ هذين -- كالنقطتين عند أطراف الحرف C، وجمعهما ولصقهما مع أنّهما كانتا منفصلتين، بحيث تصبح النقطتان نقطة واحدة، أو تقريبيهما من بعضهما البعض بطريقة ما. إنّنا كلا لا نستطيعين لصقهما معاً.

رائع. حسناً. وكذلك الأمر بالنسبة لـ A؟

صح.

إنّنا حرف الـ A مشابه تماماً لأنّنا نستطيع تعديل الحرف C ليصبح كشكل الـ A. اويمكن أخذ الـ A وليّها لتصبح كالـ C مفهوم؟

لنستطّر بخط واحد كل الأحرف المشابهة للـ C؟ وتستطيعان مناقشة الأمر مع بعضكما البعض، أثناء معالجة هذه المسألة. إنّنا نعرف C و A.

C و A حسناً جيّد. وتريدان التأكّد من أنّ الشكلين قابلان للتبديل صحيح.

على فكرة، إذا كان الحرف C يوازي الحرف A، والحرف A يوازي حرفاً آخر، عندها هذا الأخير يوازي الحرف C، لأنّك استعطت أولاً تحويله إلى شكل الآخر، وثمّ إلى شكله الأصلي، أو مباشرة إلى شكل الحرف الثاني. إنّنا لـ حسناً. أي أحرف أخرى؟

L؟ أعتقد؟

نعم

نعم. لأنّه عندها يوازي الـ A، ما يعني أنّه يشبه C.

حسناً L.

ماذا عن الحرف M؟ لأنّ لدينا قطعة مستقيمة طالما أنّنا نستطيع أن نكتب حرفاً بقطعة مستقيمة واحدة، يجب أن ننجح، صح؟ أظن ذلك، نعم.



نعم. حسناً. اتفقنا على الحرف M وعلى الحرف N.

لدي سؤال آخر -- هل يمكن تقاطع الخطوط فوق بعضها البعض؟

كلا.

كلا.

كلا. أعني إذا كنا نغيّر الشكل، إذا تقاطع خطان، يعني ذلك وجود نقطتين أصبحا الآن نقطة واحدة، لأنهما إذا أخذنا الحرف -- L هذا مفهوم التقاطع.

كلا لا يجوز ذلك، إذ عندها النقطتان تصبحان فوق بعضهما البعض فيصبحان نقطة واحدة. وعند وضع نقطتين جنباً إلى جنب تُعتبران متصلتين. صح؟

صحيح، صحيح.

مثلاً لا نستطيع تغيير الحرف N إلى O. فذلك لا يجوز. إذ لا نستطيع تشكيل الحرف O.

؟U

P و -- Q

نعم يمكننا تشكيل الحرف U.

U. هل نستطيع تشكيل الحرف S أيضاً؟

نعم.

نعم. لأنها قطعة واحدة. U و -- V

نعم.

ثمّ W.

نعم.

و Z.

حسناً. هل انتهينا؟

نعم. أظنّ كذلك.

حسناً، جيد جداً.



الأُسبوع الثامن:	تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطّاطية
المحاضرة ٢:	استكشاف أحرف الأبجدية
الموضوع ٢:	تمرين

لِنحاول الآن أن نجد مجموعة أخرى. لنبدأ بالحرف -- E لكي يعمل الجميع بالوتيرة ذاتها. لنأخذ الحرف E، ونحاول إيجاد كل الأحرف التي تشبه الحرف E، وتحديدًا برسم دائرة حولها، لكي نظهر أنّها مجموعة مختلفة من الأحرف. إذاً هذه المجموعة المحددة بدائرة، مفهوم؟ هذا الحرف E.

لنرى إن كان هناك أحرف أخرى تشبه الحرف E. ونستطيع مدها؟ طيّب.

نعم. هذا ممكن، أليس كذلك؟ إذ يمكن تقويم قاعدة E؟ نعم. جيد.

نعم. حسناً. أحاول أن أرسّم صورة في مخيلتي. هل يمكننا أن نفعل الأمر ذاته مع الـ Y؟ لا أظنّ ذلك. أظنّ اثنين فقط.

تظنّين اثنين فقط؟ نعم.

فلنرى. كنتما تتحدّثان قبل قليل عن الحرف Y، ماذا حصل لهذه المحادثة؟ يبدو أنّكما تخليتما عنها. نعم.

هل تخليتما عنها لأنكما اقتنعتما بالفارق أم أنّكما أهملتماها؟ بعبارة أخرى، لدينا بعض المعايير التي تشير إلى أنّ هذه الأمور مختلفة. مثلاً، لم يختلف الحرف C عن E؟ لم لا يُصنّفان من الفئة نفسها؟ لمّ هما مختلفان حتماً؟ لأنّنا إذا عُدنا إلى هذا المفهوم، كمدّ الخط المتصل بالدائرة، إذا كان هذا الخط امتداداً للخط المتصل بالدائرة، فيكون مختلفاً كلياً عن الـ C، التي لا تشمل امتداداً. حسناً.

هل تستطيعان إثبات ذلك عبر الاستعانة بفكرة تصوّر أنّكما حشرة في هذا العالم؟ نعم.

ما الذي سيختلف؟

لأنّه لن يكون لدينا اتجاه آخر. لدينا اتجاهان فقط -- بالنسبة للـ E وللحشرة، يكون لدينا ثلاثة اتجاهات عند تلك النقطة بالتحديد. عندها يكون لدينا ثلاثة اتجاهات.

صح.

أمّا في الحرف C، لا توجد نقطة تقدّم لنا ثلاثة خيارات من الاتجاهات. مفهوم؟ هذا صحيح.

هكذا نستشفّ أنّ الـ C ليست مثل الـ E.

طيّب.

مفهوم؟

نعم.



حسناً. الآن، عندما تحاولان مناقشة ما إذا كان أمران مختلفين، هل تستطيعان تحديد سمة فتقولاً لو كنت حشرة في هذا العالم، لكان الفرق واضحاً؟  
في الحرف  $\gamma$ ، لديك النقطة المركزية التي تتيح ثلاثة اتجاهات.  
حسناً.

حسناً. من الناحية الفنية، ألا نستطيع طي ذراعي الـ E؟ لتصبح مثل الـ  $\gamma$ ؟  
أظنّ نعم. أحاول أن أرسمها. أحاول التفكير بهذه المسألة الآن. أنا أنظر إلى الـ  $\gamma$  الآن، لأتأكد إذا كنت تلمح إلى أنّ هذه أسس النقطة ذاتها، إذا هذا ممكن. ربّما يمكنك ليّ النقطتين عند الطرف -- لرسم الشكل E. ربما؟  
لا أعرف كيف يمكن رسم هذا الشكل. أرى كيف يمكن تحويله إلى الشكل  $\gamma$ . لكن يمكن تحويله - نعم يمكن أخذ هذه وتغيير زاوية هذه النقطة تدريجياً.  
نعم.

طيب. في الواقع، يمكننا رسم نوع من سلسلة صور متحركة. نبدأ بالحرف E، ونبيّن ما فعلناه خطوة بخطوة. هذه خطوة جيّدة لنعرف ما إذا كانت كل خطوة شرعية. عندها نعرف أنّنا نسير على الطريق الصحيح.  
حسناً. وبعدها تبدّل--  
معك حق نعم.

كلا، كنت أمزح. حقاً؟  
نعم. أولاً نطوي الجزئين الأعلى والأسفل، ثم نحرك الذراعين الكبيرين بزوايا مختلفة.  
نعم.

ممتاز. إنّهما متشابهان.  
حسناً. على فكرة أريد أن أقدم لكما نصيحة حول -- حول فهم مسألة ما بعمق أكبر هذا السؤال يطرح نفسه دائماً. كلّمّا أحاول أن أتعلّم أمراً، لا أتوقّف مجرد أن أعرفه. أي عندما أكاد أعرفه. أقول لنفسي حسناً، واجهت الصعوبات في حل المسألة، فهمت لمّ هي صحيحة الآن سأصرف النظر عنها. لا أريد أن أفعل ذلك. بالعكس، عندما يتبيّن لي أن مسألة ما صحيحة، عندها أريد أن أغوص في تفاصيلها أكثر. مع أنّي أنجزت المسألة للتوّ، أريد أن أستكشفها أكثر. في هذه الحالة مثلاً، أظهرت ما كيف تنتقلان من الحرف E إلى الـ  $\gamma$ . ماذا عن العكس؟ هل تستطيعان أن تريا بوضوح كيف تحوّلان الـ  $\gamma$  إلى E؟

على فكرة، أنصحكما باتّباع هذه الطريقة للتعلّم، وهي ألاّ تتوقّف بمجرد معرفتكما للحلّ. لكن واصلا المحاولة إلى أن تصبح المسألة سهلة. إلى أن تقولوا بوضوح كيف نحلّها. عندما تصبحان واثقتين تماماً إذ قد تكتشفان أموراً أخرى أثناء المحاولة. مفهوم؟  
على أي حال، أنصحكما من خلال هذا الاستكشاف بالانطلاق من الـ  $\gamma$ ، ومحاولة الوصول إلى الـ E، ثم الرجوع إلى الورا.



تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطاطية	الأسبوع الثامن:
استكشاف أحرف الأبجدية	المحاضرة ٢:
مواصلة الاستكشاف	الموضوع ٣:

إذا لاحظت، نرى أنّ حرف الـ t أيضاً -- لينعد إلى أحرف الأبجدية. تبين لنا أنّ الـ t يشبه الـ y، الذي يشبه الـ e، الذي يشبه الـ f طيب.

حسناً. هل من أحرف أخرى؟ القاسم المشترك بين كل هذه الأحرف نقطة واحدة بثلاثة اتجاهات. ألا يجدر بنا أن نبحث عن شكل آخر يشمل نقطة واحدة فقط بثلاثة اتجاهات؟ نعم.

رائع! لنحتفل أولاً بهذه المعرفة.

هذا ما فعلناه. حتى يكون أمران متشابهين، يجب أن يجمعهما قاسم مشترك وهو أن يكون لهما نقطة واحدة بالضبط تخرج منها ثلاثة اتجاهات. وأتجاهل أي حرف آخر، لأنه لن يكون صحيحاً هل يشبه الحرف g تلك الأحرف؟ لأنه يشمل نقطة واحدة بثلاثة اتجاهات؟ نعم.

هل يهم ذلك؟

مهلاً، لا يهم إذا أخذنا الحرف g ربما يمكننا تحويله إلى T.

نعم، نستطيع لفة. يمكننا تقويمه نعم.

حسناً، نعم

طيب. صحيح. إذا لم يبدو أن الحرف g كان صحيحاً. لكن ما أدراكما، تبين أنه صحيح.

اعتقد أنّ الحرف g كان الأغرّب.

ولاحظت أنّكما توصلتما إليه أخيراً، لأنه يتسم بميزة مختلفة. يتسم بخط مقوّس. وبدأ أنّ هذا الشكل الصغير الذي يشكّل وسط الـ o لم يكن لديه الأهمية عينها كما أعلى الـ t أو الـ y أو ما شابه، صح؟ وفي الواقع، سوف أوضح أمراً عن هذه الأحرف التي رسمتها.

طيب.

من المهم جداً أن نرسمها بدقة. مثلاً، لنفترض أنّي رسمت الحرف z بشريط في الأعلى، بذنابة. ذنابة.

تعرفان ما هي الذنابة. إنها الشرائط التي يمكن وضعها في أي مكان، مثلاً عند قاعدة الـ a.

هذا يغيّر الإجابة.

هذا يغيّر الإجابة. إذا علينا أن ندرس أحرف الأبجدية كما رسمتها تماماً، وهو رسم بسيط جداً من دون شرائط وبخطوط رفيعة جداً.

طيب. حسناً.

في الواقع رفيعة جداً. نحن نفترض أنّنا نقوم بذلك في هذا العالم المجرد حيث كل الخطوط رفيعة جداً.

طيب. إذاً إنه تجريد لهذه الأحرف.



تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطاوية	الأسبوع الثامن:
استكشاف أحرف الأبجدية	المحاضرة ٢:
ترتيب أحرف الأبجدية ضمن فئات	الموضوع ٤:

حسناً، هيا بنا نكمل هذه المهمة لتنظيم أحرف الأبجدية حسب تشابه شكلها. بأي حرف نبدأ؟  
D.

؟D

فلنضع مرتباً حوله، أعتقد بأنّ الـ D يشبه الـ O .  
حسناً.

حسناً. وهل يشبه أي حرف آخر؟

لا أعتقد، لأنّ كل نقطة لديها -- لأنّ الحرفين D و O لديهما اتجاهات، وكل نقطة أخرى -  
الآن قولي الجملة كاملة. قلت إنّ الحرفين D و O لديهما اتجاهان، ولم تعني تماماً من نقطة واحدة.  
صحيح، نعم.

إذاً قولي الجملة كاملة من أي نقطة محدّدة تستطيع الذهاب باتجاهين فقط.  
صح.

أما في الأحرف الأخرى، عند بعض النقاط، يمكن الذهاب في أكثر من اتجاهين.  
صح، صح.

وهذا يبيّن أنّنا لا نستطيع تحويل الواحد إلى الآخر، لأنّ هذه السمة لا تتغيّر عند تحويل الشكل. صح؟  
حسناً، جيّد جداً.

حسناً، هذا بالنسبة إلى الحرفين D و O. ماذا عن بعض الأحرف الأخرى. أي حرف نعالج الآن؟  
أظنّ الحرف A.

A، حسناً. والآن ماذا نفعل؟  
مثلث.

مثلث، حسناً. مثلث، جيّد. إذاً، ٢ و ٣. ماذا عن منتصف الحرف V؟  
نعم.

في الواقع من المهمّ جداً أن نحدّد ما يحصل هنا؟

إذ توجد بدائل عدّة تُحدث فارقاً. هيا بنا نرى أي شكل يمكننا معالجته. هذا الرسم غير واضح. لنرسم شكلاً  
مختلفاً.

جيّد. هناك طرق عدّة لكتابة الحرف B. يمكن رسم الحرف B هكذا. أو هكذا، حيث تلامس النقاط بعضها البعض  
هنا، ليكون لدينا أربعة خطوط. سأكبر الحرف. قد يكون هكذا علينا أن نحدّد الشكل. لنفترض أنّنا أخذنا هذا  
الشكل. لأنّه يبدو لي قريباً من هذا الشكل. لكننا نعالج الشكل A الآن.

نعم. نعالج الشكل A الآن.

ماذا عن الحرف R؟

الحرف R عند إحدى النقاط، هناك ثلاثة اتجاهات، أو نقطتان بثلاثة اتجاهات.  
نعم.

نعم. وهل يمكن تغيير الشكل A ليشبه شكل R؟  
إذا أزلنا التقويس.



نعم. إذا أزلنا التقويس.

هذا صحيح.

جيد جداً.

جيد جداً. ولاحظنا على فكرة، أننا إذا رسمنا R1 بطريقة مختلفة. إذا كانت قدم R1 ظاهرة من النقطة حيث تتصل بالخط العمودي، فعندها يختلف الأمر. إذاً يختلف الأمر بحسب الشكل؟ مثلما يحصل هنا؟ نعم، لو رسمناها بهذا الشكل، لاختلف الأمر.

حسناً، لنرى. الحرف B، لا أظن أن الحرف B يشبه أي حرف آخر. لن نضع إشارة حوله إذاً. ماذا عن الحرف H؟ هل يشبه الحرف H أي حرف آخر؟ نقطتان بثلاثة اتجاهات؟ الحرف K.

لنضع دائرة متعرجة حوله؟ هكذا.

حسناً.

حسناً، هل من أحرف أخرى؟

إذاً الحرف B لوحده، كل الأحرف الأخرى توجد علامة حوله.

ماذا عن الحرف P؟ هل من حرف يشبه الحرف P؟

لم يعد لدينا الكثير من الأحرف، على فكرة، فقط الحرف P. في الواقع، فقط الحرفين P و Q؟ P و Q و X.

و X، P و Q و X. حسناً، هل هي متشابهة؟ إذاً الأحرف B و P و Q و - - هل هذه الأحرف متشابهة؟

كنت لأقول X وال Q، لكننا لا نستطيع تفكيك ال. صح. لا تستطيع تفكيك ال Q وعلى فكرة، كيف نميز ال Q عن ال X، بواسطة هذا، إذا كنا في هذا العالم، باتباع فلسفة الحشرة في هذا العالم؟ عند الوصول إلى أطراف الحرف X، لا يمكن الذهاب إلا باتجاه واحد.

اتجاه واحد، نعم؟ كم نقطة مماثلة يوجد؟

هناك أربع نقاط مماثلة. أما في الحرف Q فتوجد هذه النقطة عند الذيل الصغير. نقطتان.

نقطتان حسناً. إذاً هذه سمة مميزة. في الحرف X توجد أربع نقاط ينبثق منها خط واحد وفي الحرف Q نقطتان فقط. مفهوم؟

حسناً.

نعم. جيد، حسناً. إذاً انتهينا.

هذا رائع. لقد صنفنا الآن أحرف الأبجدية كما لو كنا نعيش في هذا العالم الافتراضي. حسناً؟ نعم.

رائع. ممتاز.



الأُسبوع الثامن:	تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطّاطية
المحاضرة ٣:	التوبولوجيا ٢: كرة وكعكة دونات
الموضوع ١:	كرة وكعكة دونات

مرحباً! ما سوف نقوم به الآن هو أننا سنركّز على بعض الأمور التي تختلف قليلاً عن تلك التي سبق أن تحدثنا عنها. حتى نخرج ببعض الأفكار الجديدة. فهيا بنا ننظر إلى هذا الغرض، هذه الكرة. هي أشبه بحدود طابة. هذه كرة. مفهوم؟

والآن بما أنه موضوع مشوّق! سوف نأخذ غرضاً آخر الآن، وهو كعكة دونات. هل تراها؟ حدود كعكة الدونات، سطح كعكة الدونات. على فكرة، ألا تبدو شبيهة؟

طبعاً! إنّها رائعة! بالفعل! أشعر بالجوع!

أتشعر بالجوع؟

تناولت الغداء للتوّ، أنا بخير!

حقاً؟

أجل!

سوف أقدم لك ورقة. خُذها.

شكراً. شكراً.

ممتاز. أمامنا إذاً كعكة دونات. والسؤال هو: هل يمكنك أن تأخذ هذه الكرة وتحولها إلى شكل كعكة دونات بمجرد تمديدها وتحريفها، فتبدو كالأخرى؟ ما رأيك؟ ما رأيك؟ أيمكنك جعل هذه الكرة تبدو ككعكة دونات؟ هل الكرة مجوّفة؟

نعم، الكرة وهذا الغرض كلاهما مجوّفان. إنّه السطح إذاً! مجدداً، سوف نعتبر المساحة مساحةً رقيقةً للغاية.

إنّه تجريد إذاً! هل ما زالت كافة قواعد العالم المطاطي منطبقة؟

صحيح.

كافة قواعد العالم المطاطي. يمكنك تمديدها وتحريفها. مثلاً، يمكنك أن تأخذ هذه الكرة الدائرية وتعطيها شكل طابقة كرة قدم. أليس كذلك؟

أو شكل موزة!

جيد إذاً! ولكنّ السؤال هو: أيمكنك تحويلها إلى طارة؟ ألم تلاحظ أنني استخدمت كلمةً؟

طاردة.

يُسمّى سطح كعكة الدونات "طاردة". هذا هو العالم الخيالي! من الجيد دائماً الاستعانة بعالم خيالي، أليس كذلك؟

هذه هي الطارة إذاً! ما رأيك؟ هيا بنا نفكّر بصوت عالٍ! بِمَ تفكّر؟ ما عندك؟ ما الذي يجول في بالك؟

أفكّر أننا لو طبّقنا قواعد عالم الشريط المطاطي، إحدى القواعد هي أنك لا تستطيع كسرها. ما أقصده هو أننا إذا أردنا أن نصنع كعكة دونات، أو طارة هناك ثقب في الوسط. للقيام بذلك، علينا اختراق الكرة. ولا يمكنك اختراقها، وليستا متساويتين.

حقاً؟ حسناً.

ما رأيك؟

أوافقك الرأي! كنتُ أفكّر أنك تستطيع أخذ الكرة-- وتتمكن من تحويلها إلى موزة؟

نعم.



لتطبيق ذلك على كعكة دونات، يجب وصل الجانبين. ولكن لا يمكن ذلك نعم. لا يمكنك وصل الجانبين أيضاً.

حقاً! جيد. فهذا غير ممكن. هذا تفسير أوضح. إنه بالأحرى حدس آخر! المشكلة الوحيدة مع هذين المنطقيين-- هما جيّدان طبعاً، إنّما المشكلة هي أنّهما قد لا يكونان ممتازين، لأنهما لن يكونا متماسكين. حقاً!

أي أنّ هذه الطريقة ليست فعالة، وطريقتك لم تجد نفعاً! ولكن لا يعني ذلك أنّ شخصاً آخر قد يعجز هو أيضاً عن التفكير بطريقة فعالة. تستطيع إذاً-- أقصد أيّ ميزات يمكننا اعتبارها لجعل هذه الأشياء متماسكة ومتينة؟ لمعرفة أنها ليست نفس الشيء؟



تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطاوية	الأسبوع الثامن:
التوبولوجيا ٢: كرة وكعكة دونات	المحاضرة ٣:
عالم حشرات	الموضوع ٢:

هل لذلك علاقة بالاتجاهات التي سبق أن تحدثنا عنها؟ كيف يمكنك أن تتخذ حيناً اتجاهين وحيناً آخر ثلاثة اتجاهات؟  
نعم.

لنجرب! على فكرة، فقد قلنا مراراً وتكراراً في هذا المساق إنّ إحدى الطرق الأهم للتوصل إلى أفكار جديدة، هي التفكير بأفكار قديمة. هذا أول ما عليك تجربته! ذلك لأنه حتى ولو لم تكن هذه الأفكار القديمة مجديّة، إلاّ أنها غالباً ما تؤدي إلى اتجاه فعال. تجرّب أولاً أفكاراً أُجِدت نفعاً في إطار مختلف فتري إذا كانت تنفع في هذا الإطار أو لا. مفهوم؟

في الإطار السابق، حين كنّا نتحدث عن أحرف الأبجدية، من بين الأمور التي نظرنا فيها، هي أنّنا لو كنّا حشراتٍ تعيش في هذا العالم لرأينا بعض النقاط المميزة. مثل نقطة في نهاية قطعة مستقيمة حيث لا يوجد سوى اتجاه واحد. أو مكان حيث يتقاطع خطان بهذا الشكل، قد تكون هناك ثلاثة اتجاهات. أو في  $x$ ، رأينا نقاطاً توجد فيها أربعة اتجاهات. لنفكر بنقطة حول الكرة ونقطة حول الطارة. ولنطرح على أنفسنا السؤال التالي: لو كنا حشرة، ولو كان عالمنا بأكمله سطح كرة، أو عالمنا بأكمله سطح طارة، أكثا استطعنا تحديد الفرق في نقطة ما؟  
نعم.

يمكننا تحديد الفرق، لأننا لو كنّا نتحدث عن السطح، فلا علاقة بالداخل. لم نكن نتحدث عن الداخل، بل فقط عن السطح، صحيح. لنفترض على السطح، لو كان على طارة، كنت ستدرك أنّك ذاهب -- إلى أسفل أي إلى أسفل الطارة. قد تدرك أنّها ليست كاملة -- قد تذهب في دائرتين صغيرتين إذا كنت تتجوّل. قد تكون هذه الكرة، مجرد دائرة كبيرة. ولكن إذا تجولت في الطارة، فقد تبدو أشبه بدائرة صغيرة.  
لا أعرف حقاً كيف أصف ذلك.

جولي؟

حسناً. ولكن المشكلة مع هذه الدائرة الصغيرة هي أن نتذكر أنّنا في هذا الكون -- العالم المطاوي حيث يمكننا أن ننفخ الأشياء لغاية أي حجم -- ليس واضحاً ما المقصود بـ "صغيرة". أفكر أنّنا لو كنّا على كرة في نقطة ما، يمكننا الذهاب في أي اتجاه. وحين أكون هنا، أشعر أنّ الشيء نفسه ينطبق أيضاً. وبما أنّه ثلاثي الأبعاد، يمكنك دائماً -- الاستمرار في -- لو كنت هنا. لو كنت هنا، لما كنت توقفت عن التجوّل.. أو لكنت ذهبت في اتجاه آخر. صحيح. في الواقع، إذا كنت في أي نقطة في الكرة، وأخذت منطقةً قريبةً من تلك النقطة، مساحة صغيرة من حولك، تكون لك رقعة. ولنفترض أنّك أخذت طارةً وأخذت رقعةً. مجرد منطقة صغيرة قريبة من منها. هل ستكونان نفس الشيء؟

نعم.

نعم. وعلى فكرة، ينطبق هذا المثال على الحياة الواقعية عندما تكون لديك رقعة للدراجة الهوائية، أو قطعة صغيرة من المطاط يمكنك استخدامها في حال ثقب دولابها، فسوف تلائم الدولاب تماماً. ولكن هل يكون الأمر ملائماً لو لديك منطاد وألصقت هذه الرقعة عليه. لا تحتاج إلى رقع بأشكال مختلفة. لأنّ المنطقة القريبة من نقطة أي نقطة في الطارة، على الجانب حتى، وفي الداخل، سوف تبدو كلها نفس الشيء محلياً. فإذا كنت تعيش على كرة كبيرة أو طارة كبيرة، وهذه هي حالتنا على فكرة. نعيش على كرة كبيرة هي الأرض.



إنّها الأرض. والمنطقة القريبة من الأرض أشبه بقطعة أرض مسطّحة. كذلك الأمر لو كنت تعيش على طارة كبيرة جداً، فسوف تبدو لك المنطقة القريبة أشبه بقطعة كبيرة من أرض مسطّحة. إنّ تلك الطريقة رائعة! غير مجدية. لا تنفع! لأنّ كل نقطة هي نفسها ككل نقطة أخرى محلياً. مفهوم؟ جيد.



الأُسبوع الثامن:	تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطاوية
المحاضرة ٣:	التوبولوجيا ٢: كرة وكعكة دونات
الموضوع ٣:	العمل على طارة

علينا أن نبحث الآن في هذا عن شيء مختلف. سوف أعيد صياغة السؤال ليكون واضحاً وضوح الشمس. أيمن أن نأخذ شيئاً مطاويماً، لنقل طارةً، وأن نمدّه بدون تمزيقه وبدون التصاق أي شيء، إنما بمجرد تمديده، ولؤيه وتحريفه، حتى نحصل على شيء يشبه تماماً الكرة المستديرة؟ هذا هو السؤال إنذاً. الطارة مجوفة أيضاً، صحيح؟ بالضبط.

جيد. فقط سطح كليهما. قلت في هذا المثال إنّ النقاط هي نفسها محلياً، صحيح؟ نفسها... صحيح. لا أعرف أين بالضبط.

--أصل إلى هذه النتيجة، ولكن هذا صحيح. كما ولو كان مطلوباً منّا أن نثبت بشكل أو بآخر أنّ النقاط ليست نفسها، ليس محلياً، ولكن على نطاق شامل؟

نعم. سوف ننظر في بعض الخواص، ربما ليس النقاط الفردية فحسب، لا بل سوف ننظر في بعض الخواص التي تتميز بها الطارة التي لديها كرة أو العكس بالعكس. إحدى الخواص هي أنّهما مختلفتان، ولكنهما تصبجان مماثلتين نتيجة عملية تحريف بسيطة.

سوف أذكرك بطريقة قديمة. عندما كنا نتحدث عن الفرق بين دائرة مع ملصق نافر ودائرة عادية. تذكر بعض الطرق التي فكرنا بها لنصنع ذلك؟

جاءت على بالنا أفكار كثيرة.

ولكن تذكر واحدةً على الأقل؟

أتذكر التسميك فقط.

لننسى التسميك الآن. لنضع التسميك جانباً. بالعودة إلى ذلك الحديث، ما كان الفرق بينهما؟ أظن...

حسناً... أقصد، لو عدنا بالوراء إلى الاتجاه حيث تصادف ثلاثة اتجاهات في نقطة ما. ولكن في الدائرة، لم يكن أمامنا إلا الاتجاه إما يميناً أو يساراً في نقطة ما.

صحيح.

ولكن هذه كانت النقطة.

صحيح.

ولكن لهذا علاقة بالخاصية المحلية لتلك النقطة. مفهوم؟

نعم.

ولكن تلك لم تجدِ نفعاً. لم ينفع التشابه مع هذا الوضع لأنّ كل نقطة على الكرة بدت نفس الشيء محلياً ككل نقطة على الطارة. ما هي الخواص الأخرى التي نظرنا فيها؟

إزالة نقطة؟

وماذا حصل؟

إذا أزلت-- الدائرة التي معها ملصق-- تزيل نقطة، تنجزاً إلى قطعتين.



نعم. وعلى فكرة، ليس كل نقطة.

كلا.

فقط--

مثلاً، إذا أزلت هذه النقطة-- فإنّ تلك تبقى نقطة. تبقى نقطة. أما إذا أزلت هذه النقطة، تحصل على اثنتين. أي نقطة على القطعة المستقيمة.

نعم.

نعم. النقطة هي أنّ ثلاث نقاط كانت هنا، وعند إزالتها حصلنا على قطعتين. أما على دائرة، فتترك أي قطعة نزيلها قطعة واحدة.

مفهوم.

فهذه فكرة، إزالة أشياء للحصول على مكائين. والآن، ماذا عن الطارة والكرة؟

فهذه فكرة إذاً للتفكير في إزالة أشياء ورؤية كم قطعة تنتج عن ذلك.

إذا أزلنا مقطعاً عرضياً؟

حسناً.

ما المقصود بمقطع عرضي؟

يشبه ما رسمته تقريباً، إنه شريحة بمقطع عرضي.

مفهوم.

ولكنه ليس بالضبط مقطعاً عرضياً إذ لا شيء فيه إنّه مجوف. إنّها دائرة.

جيد.

مفهوم؟ إذا أزلت نقطة من دائرة أو من كرة، سوف تحصل على كرة فيها ثقب صغير.

صحيح.

ولا قد لا تزال موصولة. إذا أزلت نقطة واحدة من كرة، يبقى لديك قطعة واحدة. إذا أزلت نقطة واحدة من

طارة، يبقى لديك قطعة واحدة. ولكن إذا أزلت المحيط، مثل سلسلة النقاط التي تشكّل المحيط، فسوف تحصل

على قطعتين، وهنا لا تزال تحصل على واحدة لأنه ما زال موصولاً بالطرف الآخر.

حسناً.

ماذا يحصل إذا أخذت هذه الطارة وقمت بتمديدها وتحريفها، وتعجّبت عندما حصلت على كرة. لم تعجّبت؟

أليس ذلك ممكناً؟

لأنّني إذا أخذت ابدأ هنا! لأنّني بدأت بالطارة، وقمت بتحريفها حتى تبدو مثل كرة. إذا أخرجت تلك الشريحة

في الطارة--

صحيح، هذه الدائرة.

قد تبقى موصولة. صحيح.

إذا أزلت هذه الدائرة-- لنسّم هذه الدائرة ل، هذه الدائرة بالتحديد، ليس كافة الدوائر. إذا أزلنا دائرة كهذه، قد

تنقسم الطارة إلى اثنتين. ولكن إذا أزلنا هذه الدائرة ل من الطارة، لا نزال نحصل على قطعة واحدة. مفهوم؟

ولكن، لنفترض أنّك أخذت تمّد، وجعلت منها كرة؟ ماذا يحصل ل؟

في الكرة، تنقسم ل إلى قطعتين.

بالضبط. على الأرجح أنّ ل تنتقل إلى مكان ما.

قد تلتوي.



لا نعرف إلى أيّ دائرة تذهب هنا. ولكن تصوّر أنّك أخذت الطائرة وقمّت بتمديدها وحوّلتها إلى كرة، فإنّ دائرة، ل بذاتها، حينئذٍ سوف تتمدد وتصبح دائرةً ما هنا. والآن ما الفرق بين هذه الدائرة وتلك، هذه الدائرة المحرّفة في هذه الحالة؟

إذا أخرجت ل، يبقى لديك قطعة واحدة.

هنا، صحيح.

صحيح. لأننا رأينا هذا الأنبوب متديلاً. واضح؟ ماذا عن ذلك؟ هل نتحدث عن الكرة الحقيقية؟

حدود كرة. حدود الكرة إذا أزلت هذا الخط المنحني. سوف تظل تحصل على شيء كامل.

على كم قطعة سوف تحصل؟ قطعة واحدة فقط، أليس كذلك؟

حسناً. ربما. هذه كرة، صحيح، حدود كرة.

حسناً.

وإذا قصصت بالمقصّ حول خط منحنيّ-- تحصل على ل وما تبقى منها؟ وإذا قصصت على طول ل، على كم

قطعة سوف تحصل؟ هل ترى ل كما أنا أراها، على السطح؟

نعم.

نعم. وسوف تحصل على ل، ثمّ تحصل على الكرة ناقص ل.

ألا تبدو ل كقطعة لغز تتناسب مع الكرة؟

حسناً.

أفكر إذاً بدائرة ل على أساس أنّها الجزء الأسود بذاته، وليس ما في الداخل. دائرة ل هي مجرد-- رقيقة-- إنّها

حدود دائرة. ليست قرصاً. مفهوم.

جيد.

واضح؟

نعم.

إنّه مجرد شيء على شكل شريط مطاطي. ليس قرصاً. يمكن إذاً الحصول على اثنين؟ ممكن؟ يفترض ذلك،

ولكن بما أنّها طائرة، ألن تستطيع؟

نعم.

ماذا تستنتج إذاً؟ بما أنّ لديك قطعة واحدة فقط، فلا تزال طائرة؟

مفهوم.



الأُسبوع الثامن:	تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطّاطية
المحاضرة ٣:	التوبولوجيا ٢: كرة وكعكة دونات
الموضوع ٤:	تحويل طارة إلى كرة

جولي أخبريني بَم تفكرين؟  
تخطر على بالي فكرة أن نأخذ بالوناً وننفخه.  
نعم. صحيح. وسيكون ذلك كرتك، أليس كذلك؟  
نعم.  
لأنّه مجوّف في الداخل.  
صحيح. بعدها نرسم الفقاعة المتعرجة عليه. منحى؟ فقط المنحنى؟  
المنحنى...  
ألن تملأه؟  
نعم فقط المنحنى. حسناً.  
ثمّ ماذا لو قطعنا على طول ذلك الخط--  
نعم.  
عندئذٍ سوف نحصل على بالون.  
طبعاً، وسوف ينفجر، ولكن لا بأس في ذلك. فسوف نحصل على ما في داخل الدائرة اعتقد أنّي أفهم ما تقولينه.  
تحصلين على بالون وعلى قطعة تكون قد قطعيتها للتو.  
حسناً.  
مفهوم. فكم قطعة لديك إذاً؟  
اثنان.  
قطعتان؟  
إذاً--  
صحيح. والآن لنفترض أنّك بدأت بطارة، وقطعت على طولها وأزلت دائرة الدائرة المقوّسة؟  
تحصل على واحدة فقط.  
قطعة واحدة؟  
صحيح.  
صحيح. أترى الفرق إذاً؟  
الفرق--  
نعم. إذا استطعنا أن نقوم بتحريف الطارة ونعطيها شكل كرة.  
حسناً--  
فعند إزالة ل، سوف نحصل على قطعة واحدة فقط هنا. وسوف تبقى القطعة الواحدة المحرّفة قطعةً واحدةً.  
حسناً. ولكن هنا، أيّما كان المنحنى، إذا قطعناه، فسوف نحصل على قطعتين. بالتالي، لا بدّ أن تكونا مختلفتين.  
مفهوم. هل هذا منطقي؟  
منطقي--  
حسناً. استخدامي هذه الفكرة إذاً لمعرفة كم قطعة عليك أن تزيل للحصول على قطعة واحدة أو قطعتين هي فكرة سبق أن خطرت على بالنا. لتطبيقها على هذا الواقع الجديد.



حسناً.

مفهوم؟

نعم.

الآن إذناً، أماننا المزيد لنقوم به، وهذا مسلّ على فكرة. إنّه مسلّ بالفعل.



الأُسبوع الثامن:	تعلم الهندسة بواسطة أوراق مطاطية
المحاضرة ٤:	العالم المطاطي
الموضوع ١:	أوجه التشابه وأوجه الاختلاف في عالم مطاطي

الأستاذ: لتتوقف برهةً فسوف أقدم بعض الملاحظات قضت استراتيجية التفكير بأفكار جديدة بأخذ العالم الذي نعيش فيه مثلاً والنظر إليه كما ولو كانت بعض خصائصه مختلفةً. ثم نظرنا إلى العالم وقلنا، لنفترض أن كل شيء حولنا قابل للتحريف والتمديد واللوي، ماذا نقول عن أوجه التشابه وأوجه الاختلاف في الهندسة في هذا العالم القابل للتحريف.

يؤدي ذلك إلى وجود كامل جديد متجانس إنما مختلف. عالم يمكننا استكشافه. ويبدو أن استكشاف هذه الوقائع التجريدية يؤدي إلى كافة أنواع الأشياء التي تعود وتترك آثاراً على عالمنا الحقيقي. وهذه على فكرة إحدى الخصائص السحرية للرياضيات، التي يمكنك استكشافها في التجريد. ثم يتبين أن هذه البنى والأفكار التجريدية أي أن تدخل في عالم يبدو بعيداً عن عالمنا لديها تطبيقات في العالم الحقيقي. ولكن التطبيق الذي لدينا اليوم والذي يمكننا استخدامه في كل يوم هو أنك تستطيع تطوير أفكار جديدة عندما تريد.

إذا أردت فكرةً جديدةً، يكفي أن تفكر في ذلك. حاول أن تتخيل. ومن ثم تخيل شيئاً مختلفاً قليلاً واتبع نتائج ذلك التغيير. إنها إذاً استراتيجية سحرية فعالة لنأتي بأفكار جديدة. ولكن نستطيع أن نأتي بهذه الأفكار الجديدة عبر طريقة تفكير خاصة. وهذا ما بدأناه اليوم، وسوف نجد أن المزيد يستحق الاكتشاف أيضاً داخل عالم الهندسة المطاطية.

وداعاً.



الأُسبوع الثامن:	تعلّم الهندسة بواسطة أوراق مطاطية
المحاضرة ٤:	العالم المطاطي
الموضوع ٢:	مقابلة جولي - إبقاء أو إزالة؟

مرحباً، أنا جولي. أدرس في جامعة تكساس في أوستن. وأتطّلع إلى التخصص في علوم الكمبيوتر. وخلال أوقات فراغي، أحبّ ممارسة الرياضة. للحفاظ على صحتي والتخفيف من ضغوطات الدراسة. وأظنّها محاضرةً شَيِّقَةً فعلاً.

من الشَيِّق أن نفكّر في عالم مختلف عن عالمنا الواقعي. وفي النهاية، طرح الأستاذ ستاربيرد نقطةً هامّةً حول كيفية ابتكار الألعاب. وكيف يمكنك أن تأخذ ناحية واحدة من الواقع وتغيّرها. وبالنسبة إلى علوم الكمبيوتر، قد يكون من المهم الخروج من الصف. فمثل الأشخاص الذين يبتكرون تطبيقات آي فون أو أندرويد. لطالما أردتُ فعل ذلك، ولكن ليست لدي أي أفكار. ففكرتُ أنّ ذلك قد يكون شَيِّقاً. يمكنني مثلاً أن آخذ فكرته بأخذ ناحية من العالم الحقيقي ومن ثمّ تغييرها قليلاً واستخدامها كفكرة للتطبيق أو ما شابه.



الأُسبوع الثامن:	تعلم الهندسة بواسطة أوراق مطاطية
المحاضرة ٤:	العالم المطاطي
الموضوع ٣:	مقابلة كاثلين - إبقاء أو مراجعة؟

اسمي كاثلين، وأدرس في جامعة تكساس في أوستن. لم ألتحق بعد في أي اختصاص، ولكن أتمنى أن أتخصص في التمريض وأهوى الرياضة كالركض. والطبخ وغيرها من النشاطات المماثلة. وأكثر ما أعجبنى في المساق، ما فعلناه للتوّ، تحديداً عندما تحدثنا عن الأبجدية. وكيف يمكننا أن نأخذ بعض الحروف ونحوّلها إلى حروف أخرى في الأبجدية وعكسها. وأخذ تدفق الأفكار من المفهوم السابق الذي كنا نتحدث عنه، بخصوص الكرة والملصق. وإدخالها في فكرة جديدة مع الأبجدية. أعتقد أنه موضوع شيق جداً.



الأُسبوع الثامن:	تعلم الهندسة بواسطة أوراق مطاوية
المحاضرة ٥:	ما قصة لغز الجامعة؟
الموضوع ١:	لنقدم للغز!

أهلاً بك!

يرمي هذا المساق بأكمله إلى هدف واحد. وهو أن يجعل منك مفكراً يفكر بفعالية أكبر. يمكنك من حل مشاكل في حياتك الواقعية. ومن يتمكن من الخروج بأفكار جديدة يستطيع حلّ مسائل صعبة بطرق ابداعية ومبتكرة. هذا هو الهدف. ومن هنا سوف ننتقل.

سوف نبدأ ببعض الألغاز الرياضية العادية والمسلية. وأنا شخصياً أحبّ الألغاز. ولكن أثناء حلّ هذه الألغاز، سوف نفكر بوعي شديد في عملية توصلنا إلى طرق مبتكرة وفعالة لحلّ هذه الألغاز. بدايةً، اسمح لي أن أقدم إليك كيلى.

كىلى. قولي مرحباً.

مرحباً أنا كىلى. ويسرني أن أكون هنا.

مرحباً، اسمي كىلى. أنا طالبة أتخصّر لدخول كلية الطبّ في جامعة تكاس في أوستن. أتخصص في علم الأحياء كما أحضر دراسات الثقافة الأميركية الأصلية ويسرني أن أكون هنا لأنني وجدت فكرة تبسيط حياتي عبر هذه الاستراتيجيات البسيطة لتغيير نظرتي للعالم من حولي-- ووجدت ذلك مذهلاً. وأنا مستعدة دائماً للتحدي. فسوف يكون الأمر مسلياً جداً.

سوف يُطلب من كىلى حلّ بعض الألغاز. وسوف نشاهدها وهي تحاول حلّ هذه الألغاز التي لم يسبق لها أن رأتها. قبل كل شيء، هل أنت أكيدة أنك لم يسبق لك أن رأيت هذه الألغاز من قبل؟  
إطلاقاً

إطلاقاً! فما ستراه الآن هو كىلى على حقيقتها في الواقع. كيف ستتعامل مع هذا اللغز الجديد والمعقد نوعاً ما وتحاول حلّه؟

فسوف تشاهد إذناً لسببين. الأول، هو أنني أحب أن أراك تحلّ اللغز بنفسك. هذا أحد السببين. لأنّه قبل كل شيء أمر مسلّ. ثانياً، سوف تتعلم استراتيجية التفكير بنفسك ولنفسك. ولكن حتى ولو كنت تحلّ المسألة حالاً، ما زال من المهم مشاهدة محاولات كىلى. ورؤية التفاعل لتتمكّن من التفكير باستراتيجيات تفكير مثمرة، وربما استراتيجيات أقل فعاليةً. فنتعلم إذناً من كافة الخطوات، الخطوات الجيدة والعثرات على حد سواء.  
فماذا ننتظر لنبدأ إذناً!

سوف أقدم لك، أولاً، اللغز الأول. وسوف يظهر على الشاشة هنا. واسم هذا اللغز هو: **ما قصة الجامعة؟** إنّ جامعة WU مؤسسة جيدة، ولكنها مليئة بالتناقضات. غرف نوم الطلاب مريحة، ومع ذلك ينام جميع الطلاب في الصف. وهذه ليس فكرةً جيدةً، على فكرة. يذهب فريق الركن التابع لها من مكان إلى آخر، ومع ذلك، تحمر حدودهم إرباكاً. لأنهم يخسرون كل مباراة.

جميع الطلاب نباتيون ومع ذلك يبقى اسم منشأة الطعام الخاصة بهم هولستين هول. واتحاد الطلاب اسمه مجلس النواب

فكر فعلياً أن ذلك هو بالضبط ما فعله مسجلة الجامعة في احتساب المعدلات التراكمية للصف المتخرج الحالي. ففي كل سنة، يحسب المعدل التراكمي للطلاب الذكور، والمعدل التراكمي للطلاب، ويحسب المعدل التراكمي للصف المتخرج ككل. ولاحظت هذه السنة شيئاً غريباً جداً. كان حساب المعدل التراكمي للطلاب



الذكور في الصف الحالي أعلى من حساب المعدل التراكمي للطلاب الذكور مقارنةً بالعام الماضي. وقد حصل الأمر نفسه مع الطالبات. كان حساب المعدل التراكمي للطالبات المتخرجات في هذا العام أعلى من حساب المعدل التراكمي للطالبات مقارنةً بالعام الماضي. إلا أنّ حساب المعدل التراكمي لجميع الطلاب في الجامعة قد انخفض. يبدو الأمر مستحيلاً، أليس كذلك؟  
نعم.

حسناً، يبدو ذلك خاطئاً. إليك السؤال. ونظراً لعدم وجود أي أخطاء في حسابات المسجل، أي يمكن حدوث هذه الظاهرة فعلياً؟ أو هل هو سيناريو سخيّف ومستحيل لدرجة أنّ السؤال لا يستحق الجواب، ما مشكلتك؟ إذا كان هذا السيناريو ممكناً، أرجو منك تفسيره. وإعطاء مثل محدد حيث يرتفع حساب المعدل التراكمي للطلاب الذكور، ويرتفع حساب المعدل التراكمي للطالبات، ومع ذلك، ينخفض حساب المعدل التراكمي للصف ككل.

والآن فإنّ إحدى الخصائص المشتركة بين هذا السؤال والعديد من الألغاز، هي أنّ هناك مواد كثيرة في السؤال يمكن تجاهلها من دون أي خطر. وهذه إحدى خصائص مشاكل عديدة في الحياة. ما هي الخصائص الأساسية؟ وما هي الخصائص السطحية؟

على الأرجح اسم الجامعة، قد لا يكون مفيداً جداً.  
على الأرجح هناك تفاصيل كثيرة حول حياة الطلاب في سكنهم الجامعي، قد لا تكون مفيدة جداً. لذا علينا التركيز على المشكلة الفعلية، وهذا هو تحدّيّنا هنا.  
الشيء الوحيد الذي أطلب منك ألا تفعله خلال حلّ اللغز، لا تقل الأجوبة وحسب. لأنك--إذا قلت جواب لغز تكون قد قضيت على إحدى ملذات الحياة، وهي أن تحاول أن تحزر هذه الأمور لوحدهك.



الأُسبوع الثامن:	تعلم الهندسة بواسطة أوراق مطاوية
المحاضرة ٥:	ما قصة لغز الجامعة؟
الموضوع ٢:	لا انتظر هذه المرة - إليك الحل!

أولاً، كي لي قمت بعمل رائع. وتمكنت من حل هذه المسألة. قمت ببعض الأخطاء في البداية ولكنك تعلمت منها، ثم تابعت العمل حتى تمكنت من حل المسألة. وأول سؤال هو: هل أنت سعيدة لأنك تمكنت من حل المسألة؟ هل كان ذلك مسلياً؟

نعم، إنه شعور جيد أن أتمكن من إيجاد الحل وأشعر بالرضى. وأنا فخورة بما فعلت. جيد جداً. ويفترض بك أن تكوني كذلك. وبالفعل، أظن أنه طبيعي أن تشعر بالرضى عندما ترين فكرة في موضوع تجهدين عقلك بالتفكير به. ثم تبدئين فهم شيء وتنظرين إليه بشكل مختلف عن قبل، وتتمكنين من اختراق اللغز والوصول إلى جوهر المسألة. وتعتبر هذه المسألة تحديداً درساً لنا جميعاً. ولهذا درس علاقة بالانحياز.

عندما بدأت تحلين المسألة، وقد أجدت الطريقة نفعاً-- والتمست ذلك. لاحظت هذا كله. عندما كانت كي لي تعمل على هذا السؤال، كان في ذهنها افتراض طبيعي أن عدد الذكور والإناث في صف العام الماضي هو نفسه كما في صف العام الحالي. وقامت بشيء جيد جداً وفوراً من دون أي تردد. فقد أعطت مثلاً محددًا بأعداد حقيقية، وهكذا كانت تكتسب خبرةً. ونظرت في مثال ولم يجد نفعاً. ارتفعت معدلات النقاط عند الذكور، والإناث، وعلى الأرجح في الصف ككل. وجربت مثلاً آخر. وحصل الأمر ذاته. لم يجد نفعاً. كانت تكتسب خبرةً. ثم كان عليها التعاطي مع المسألة التي ظنت لوهلة أن حلها مستحيل. ثم واجهت فكرة أن ثمة افتراضاً كان يعمي عينيها. وما تبين أن افتراض عدد الذكور والإناث في العاميين كان نفسه مقارنةً بصف العام الماضي. يجعل الحل مستحيلاً. ولكن عندما تفكر بوضوح بما يعني حساب المعدلات التراكمية وكيفية احتسابها، تدرك أن هناك افتراضاً لو أنك تتجنبه، سوف تتمكن من حل المسألة. وكان ذلك خير مثال على أن لدينا جميعاً انحيازات في حياتنا، وإذا استطعنا فعلاً التفكير بكيفية تخطيها ومعرفة ما إذا كنا نستطيع التحرر من تلك المعتقدات ورؤية الخصائص الممكنة للعالم التي قد نجهلها أحياناً، وأن حلول المشاكل غالباً ما تأتي بطرق مبتكرة وابداعية. فكان ذلك درساً لنا. وسوف نتطلع إلى التعلم من دروس أخرى حول التفكير والاستراتيجيات الفعالة للتوصل إلى حلول مبتكرة في الأيام والأسابيع القادمة. حضيت على إحدى ملذات الحياة، وهي أن تحاول أن تحزر هذه الأمور لوحده.