نص محاضرات الأسبوع الخامس من مساق "التفكير الفعّال من خلال الرياضيات"

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ١:	**البُعد الرابع: ابتكار مفهوم**
الموضوع ١:	**مدخل**

تحدّثنا في القسم الأخير عن **اللانهاية**. كنا سنسترسل في الكلام عن هذا الموضوع. ولكنّنا الآن سنخوض مغامرةً جديدة في **البُعد الرابع**.

وهنا سنفسّر استراتيجية التراجع، أي الرجوع دوماً إلى ما هو مألوف بغية تطوير مفهوم واضح حول البُعد الرابع الخارج عن المألوف تماماً.

أعتقد أنّك ستستمتع جداً.

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ١:	**البُعد الرابع: ابتكار مفهوم**
الموضوع ٢:	**طرح الأسئلة لاستكشاف البُعد الرابع**

من أقوى سُبُل التأمل بأفكار جديدة هو فهم الأمور البسيطة بعمق. ومن المذهل إلى أي مدى يمكنك الوصول عبر التفكير باستراتيجية بسيطة وتطبيقها في حياتك الخاصة. لذلك ما سنفعله اليوم هو نقل أنفسنا إلى البُعد الرابع.

يبدو الأمر غريباً حقاً. ولكن ألا يبدو مسلياً أيضاً؟

سوف نستمتع بوقتنا اليوم. أريد أن أعرّفك بادئ الأمر على مغامرينا اللذين سيخوضون هذه الرحلة إلى البُعد الرابع.
هذه جولي. جولي، قولي مرحباً.
مرحباً.
هذه جولي، وأنت تذكر مارشال.
سلام.
قُل مرحباً، مارشال. هل قلت مرحباً؟ جيد جداً. ها نحن إذاً.

سوف نذهب الآن إلى البُعد الرابع. نحن نريد الآن تطوير مفهوم، مفهوم البُعد الرابع. ويحدوني الأمل بأن تنظر إلى البُعد الرابع بعين الغموض، والاستغراب والحماس. لأنّها الحقيقة فعلاً. إنّه مشوّق. ولكن كيف يمكننا تطوير مفهوم متماسك لفكرة تجريدية، وسريالية وصوفية كالبُعد الرابع؟

فلنبدأ بالعملية الأساسية، وهي طرح الأسئلة. طرح الأسئلة.

سوف أطلب الآن من مارشال وجولي التفكير بأسئلة حول البُعد الرابع. لأنّهما لا يعرفان شيئاً حول الموضوع. ولكنّهما في الواقع قد يتمكّنان من طرح بعض القضايا التي يعتبرانها أساسية لفهم البُعد الرابع.

فلنبدأ ونسأل جولي ومارشال جمع بعض الأسئلة عن البُعد الرابع. هل لديكما بضع أسئلة؟ أي نوع من المعلومات تودّان معرفتها حول البُعد الرابع؟

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ١:	**البُعد الرابع: ابتكار مفهوم**
الموضوع ٣:	**التراجع: الفضاء ثلاثي الأبعاد**

ماذا عن تعريف البُعد الرابع؟ ما هو البُعد الرابع؟ ثمة سؤال رئيسي. ما هو البُعد الرابع؟ ماذا عنك؟ هل لديك أي أسئلة؟

أنا أتساءل كيف سيبدو المكعب في البُعد الرابع. ما هو نظير شكل مألوف من البُعد الثالث في البُعد الرابع؟

جيّد، هل لديك أسئلة أخرى؟

نعم، كنت أودّ أن أسأل ما ارتباطه بالأبعاد الأخرى؟ كيف يرتبط بالأبعاد الأخرى.

إنّها أسئلة ممتازة. لأنّها تخبرك-- وهذا ما فعلته من تلقاء ذاتك، وأبهرني حقاً-- أنّك توصلت إلى القضية، وعلى وجه التحديد، كيف سترتبط هذه الفكرة المجرّدة من البُعد الرابع بالعالم المألوف لنا؟

العالم المألوف المكوّن من الأبعاد الأخرى، الأبعاد الدنيا، أو مثل المكعب، وما سيكون نظيره في البُعد الرابع؟

إنّها فكرة سديدة يمكن الانطلاق منها. لنبدأ بالعودة إلى الأساسيات.

يمكن وصف موضوع تمريننا اليوم بكلمة واحدة: التراجع. فكلما حاولنا العمل على حل مسألة صعبة، مثل البُعد الرابع، علينا دوماً التراجع إلى الأبعاد الدنيا، لنرى ما يحدث فيها، ومن ثم استخدام التناظر لتطبيق هذه الأفكار على البُعد الرابع. هذه ستكون استراتيجيتنا في عملية الاستكشاف. وحين أقول استكشاف، أعني بذلك ابتكار مفهوم البُعد الرابع، اتفقنا؟

لنعُد إلى الخلف ونفكّر بالأبعاد السابقة. ما هي هذه الأبعاد السابقة برأينا وكم يمكننا أن نستمر في العدّ التنازلي؟ جولي، ما رأيك؟ ما البُعد الأقل من البُعد الرابع؟ الثالث؟ البُعد الثالث. هذا النوع من الأسئلة مهم، أليس كذلك؟

نعم.

على كل الأحوال. كنّا نتحدث عن البُعد الثالث.

صحيح.

البُعد الثالث هو كهذه الغرفة. الغرفة ثلاثية الأبعاد-- وعلى فكرة، سوف نتحدّث عمّا يُسمّى بالفضاء الإقليدي. وفي هذه الحالة، الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد. يمكننا أخذ هذه الغرفة كمثال. فهي تضمّ ثلاثة اتجاهات يمكن تحريكها لوصف موقع غرض ما. مثلاً إذا كانت ذبابة تغطّ في مكان ما داخل الغرفة، يمكنك أن تقطع مسافة معينة إلى اليسار، ومسافة إلى الأمام، ومسافة إلى الأعلى أو الأسفل. وهكذا تحدّد موقع الذبابة.

ثمة إذاً ثلاثة درجات من حرية الحركة إذا جاز التعبير. ذهاباً وإياباً، صعوداً وهبوطاً، وجنباً إلى جنب. هذا هو إذاً البُعد الثالث، والسار بشأن الفضاء ثلاثي الأبعاد هو أنّه مألوف لنا. إنّه العالم الذي يبدو أنّنا نعمل فيه. ولست أؤكّد الأمر لأنّ الفهم المادي الحديث للعالم--أي علماء الفيزياء الذين يصفون كوننا الفعلي— غالباً ما يشيرون إلى أبعاد أعلى من الأبعاد الثلاثة المرئية التي نألفها. فهم يفكّرون بأبعاد عديدة أعلى. ولكنّ هذا ليس موضوع بحثنا الآن. يبدو أنّ هذه الغرفة فضاء ثلاثي الأبعاد إذاً. طيّب.

ولكنّ استراتيجيتنا هي التراجع، التراجع، التراجع إلى أبسط فكرة تخطر في بالنا. ما هو أبسط من الفضاء ثلاثي الأبعاد برأيك؟

الفضاء ثنائي الأبعاد.

الفضاء ثنائي الأبعاد. كيف تمكنتَ من إيجاد هذا الجواب؟

هذا رائع. ممتاز.

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ١:	**البُعد الرابع: ابتكار مفهوم**
الموضوع ٤:	**التراجع أكثر: الأبعاد الأكثر تدنيًا**

الفضاء ثنائي الأبعاد. كيف يبدو شكل الفضاء ثنائي الأبعاد؟ ما رأيك بالفضاء الإقليدي ثنائي الأبعاد؟ كيف يبدو شكله؟ مسطحاً؟

مسطحاً.

مسطحاً. مثل سطح الطاولة. مسطحاً تماماً. مثل سطح مستوٍ. الفضاء ثنائي الأبعاد هو سطح مستوٍ إذاً. هذا هو الفضاء الإقليدي ثنائي الأبعاد. هل هناك بُعد أدنى من ذلك؟ البُعد أحادي؟ نحن نتبع نموذجاً معيناً. هل ترى النموذج؟ نتبع نموذجاً.

إنّها استراتيجية قيّمة ومفيدة جداً. أدنى من اثنين هو واحد.

ممتاز، ممتاز.

وكيف سيبدو شكل البُعد الأحادي؟ خط؟

خط، خط مستقيم.

هذا صحيح، الفضاء أحادي الأبعاد هو خط مستقيم.

جيد جداً. هل هناك بُعد أدنى؟

فضاء دون أبعاد. فضاء دون أبعاد.

فضاء دون أبعاد.

فضاء دون أبعاد. كيف سيكون الفضاء دون أبعاد؟ نقطة؟

نقطة.

ماذا عن النقطة؟

نقطة واحدة.

تذكّر، في الفضاء أحادي البُعد، كل ما تحتاجه هو رقم واحد لتحديد موقعك. إذا كنت على خط، فالخط الفعلي هو فضاء أحادي البُعد. كل ما تحتاجه هو رقم واحد لتحدّد موقعك. وفي الفضاء ثنائي الأبعاد، إذا ذهبت جانباً وصعوداً، ثمة عددان يمكنهما تحديد نقطة في الفضاء ثنائي الأبعاد. أما في الفضاء دون أبعاد، فلا تحتاج إلى أي معلومات. لو كنت تحيا في فضاء دون أبعاد، لكنت في المنزل الآن. لأنّك--على فكرة، لم تكن لتفوتك أي حفلة، لأنّه لا يوجد سوى نقطة واحدة، وأنت فيها. أليس هذا رائعاً؟ هل ستكون هناك أي حفلات في الفضاء أحادي البُعد؟

نعم. بالطبع، إنّهم يحتفلون.

إنّهم يحتفلون-- وفي الفضاء دون أبعاد يمضون وقتاً طيباً أيضاً. ما فعلناه حتى الآن هو أنّنا أنشأنا نماذج لكل هذه المساحات ذات الأبعاد المختلفة. الفضاء دون أبعاد هو نقطة. الفضاء أحادي البُعد هو خط. الفضاء ثنائي الأبعاد هو سطح مستوٍ. الفضاء ثلاثي الأبعاد يشبه هذه الغرفة. وما نودّ فعله هو استخدام فهمنا لهذه المساحات ذات الأبعاد الأدنى للانتقال من البُعد الثالث إلى البُعد الرابع، اتفقنا؟

الآن وقد حصلنا على النماذج لمختلف هذه المساحات ذات الأبعاد الأدنى، فلنرَى ما العلاقة بينها. بكلمات أخرى، كيف تنطلق من فضاء ذي بُعد أدنى لبناء فضاء ذي بُعد أعلى؟

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ١:	**البُعد الرابع: ابتكار مفهوم**
الموضوع ٥:	**بناء أبعاد أعلى**

على سبيل المثال، من فضاء دون أبعاد، الذي هو نقطة، كيف تبني فضاء أحادي البُعد، أي خط؟ ما العلاقة بين الفضاءين؟

إنّها مجموعة نقاط.

مجموعة نقاط. صحيح. مجموعة نقاط. وفي الواقع، نقطة لكل عدد حقيقي. نقطة لكل عدد حقيقي. ليس عليك سوى رسم نقطة ومدّها من الجهتين. كل موقع على الخط الحقيقي هو نقطة في الفضاء أحادي البُعد. بكلمات أخرى، يمكنك التفكير بالأمر على أنّه تكديس للأفضية دون أبعاد. لننتقل الآن من الفضاء أحادي البُعد إلى الفضاء ثنائي الأبعاد. كيف عساك تنفّذ المهمة؟

إعطاء عدد حقيقي لكل نقطة، لكل عدد حقيقي في الفضاء ثنائي الأبعاد؟

حسناً، أنا لا--

كيف تنتقل إذاً من فضاء أحادي البُعد، الذي هو خط، لبناء فضاء ثنائي الأبعاد؟ هل تصنع كومة من الخطوط؟ ما رأيك؟ كومة من الخطوط؟

طبعاً.

طبعاً. اصنع كومة من الخطوط.

بالتأكيد. كومة من الخطوط. لأنّه يمكنك الحصول على خط لكل عدد حقيقي. وإذا وضعت كومة من الخطوط، لن يتلامس أي خطين منها على فكرة. بل يصبح لديك خط حقيقي كامل. لكل عدد حقيقي، تمدّ النقطة. ويمكنك سحبها لابتكار سطح مستوٍ. في الواقع، لديّ هنا مثال عن طريقة مقاربة هذا الأمر. يمكننا التفكير بالفضاء ثنائي الأبعاد على أنّه كومة من الأفضية أحادية البُعد. وقد حدّدت خمسة منهم هنا. ولكن في الواقع، ثمة العديد من الأفضية التي لم أحدّدها. فهناك عدد لامتناهٍ بين الفضاء والآخر. صحيح؟

لأنّ كل عدد حقيقي واحد لديه خط كامل، أي فضاء أحادي البُعد يتم تكديسه لإنشاء هذا الفضاء ثنائي الأبعاد. ولكنّني حدّدت خمسة منهم فقط. اتفقنا؟ هل هذا واضح كفاية؟

جيّد.

كيف سنبني فضاءً ثلاثي الأبعاد؟ كيف عساك تبني فضاءً ثلاثي الأبعاد انطلاقاً من فضاء ثنائي الأبعاد؟ نأخذ كل السطح المستوي ونجرّه؟

نعم، أو نكدّسه فوق بعضه. بكلمات أخرى، لدينا سطح مستوٍ ومسطح ثنائي الأبعاد، وفوقه سطح آخر، وهكذا دواليك. وهكذا تتكدّس الأسطح. إذا كان لديك سطح لكل عدد حقيقي، هكذا تكدّس وتنشئ- تملأ الغرفة بكاملها. إذا أخذت مجموعة من الأفضية ثنائية الأبعاد وكدّستها، فهي لا تلامس بعضها. أي أنّه في أي فضاءين على الكومة- لديك واحد هنا، وواحد هنا، وواحد هنا. ونحن دائماً ما نرى ذلك على فكرة، حين يكون لديك

مجرد كومة من الورق. ونحن دائماً ما نرى ذلك على فكرة، حين يكون لديك مجرد كومة من الورق. ولكن في هذه الحالة لن يلامس بعضه لأنّه منفصل، كل فضاءين مختلفين ذات أبعاد ثنائية.

إذا كانا على مستويين مختلفين فهما لا يتلامسان بطبيعة الحال. مفهوم؟

يمكننا وصف هذه الفكرة بطريقة بصرية على هذا النحو. يمكننا النظر إليها بهذه الطريقة. يمكننا القول--وقد رسمت تواً خمس نسخ مختلفة لهذه المستويات من أجل ابتكار تمثيل للفضاء ثلاثي الأبعاد. لأنّه لديك مستوى صفر، أي سطح مستوٍ. ومن ثم لديك على مستوى النصف، سطح مستوٍ. وعند المستوى واحد لديك سطح مستوٍ. وفي الأسفل عند مستوى ناقص نصف لديك سطح مستوٍ. وعند ناقص واحد لديك سطح مستوٍ. وعند كل عدد بينها ثمة سطح مستوٍ أيضاً، وفي الأسفل والأعلى.

لديك إذاً الكثير من الأسطح المستوية، سطح لكل عدد حقيقي. ولكنني لم أرسم سوى خمسة هنا. كان في وسعي أن أرسم عدداً لامتناهياً، ولكنّني لم أرد المبالغة في الأمر. لذا رسمت خمسة فقط. موافق؟ هل تفهم إذاً هذا التمثيل للفضاء ثلاثي الأبعاد؟

أعتقد ذلك.

جيد. على سبيل المثال، نظام المحور هذا عند المستوى واحد، لا يدخل في نظام محور المستوى ٢. بل هو يمثل مستوى منفصلاً. فهي لا تلامس بعضها. بكلمات أخرى، للانتقال من فضاء ثنائي الأبعاد إلى فضاء ثلاثي الأبعاد، ليس علينا سوى تكديس مجموعة من الأفضية ثنائية الأبعاد. وهي لا تلامس بعضها. دعني الآن أطرح عليك سؤالاً. كيف عساك تبني فضاءً رباعي الأبعاد؟

الأسبوع الخامس:	البُعد الرابع
المحاضرة ٢:	إنشاء البُعد الرابع بالتناظر
الموضوع ١:	كيف يمكنك تكديس أفضية ثلاثية الأبعاد؟

كيف تبني فضاء رباعي الأبعاد؟

كدّس أفضية ثلاثية الأبعاد فوق بعضها. ما رأيك؟

موافق.

ممتاز. ممتاز. بالطبع. ليس عليك سوى أخذ أفضية ثلاثية الأبعاد، وتكديسها فوق بعضها. هل تلامس بعضها؟

حتماً لا.

لا، لا.

حسناً. وهل لديك أي مشكلة بشأن هذا الأمر؟ لا؟

كلا.

ماذا عنك جولي؟ أي مشكلة؟

لا أعتقد ذلك.

لَمَ تشكّكين في ذلك؟ هل هناك مشكلة؟

وكأنّ الأمر يشبه ما فعلناه مسبقاً، أي تكديس الأبعاد السابقة. لا مشكلة.

قد يعتقد البعض أنّه هناك مشكلة ما. صحيح؟ فنحن نأخذ كل هذه الغرفة-- ولكن أين سنكدّسها؟

نعم. أين نكدّسها؟

أين نكدّسها؟ ألم يخطر في بالك قط أنّها مشكلة؟

لا بأس.

ما رأيك؟ لقد تمكنّا من تكديس هذه الخطوط ثنائية الأبعاد فوق بعضها.

صحيح.

صحيح أنّها في هذا التمثيل قد تلتقي ببعضها، ولكنّنا نفترض أنّها لا تلتقي. طيّب.

هذا صحيح.

نعم. بكلمات أخرى، حتى في هذا التمثيل للفضاء ثلاثي الأبعاد، يتطلب الأمر بعض الفكر التجريدي لتحقيق الأمر. لأنّ هذا السطح المستوي عند مستوى النصف مثلاً، يمثّل فضاءً لا يلمس هذا ولا ذاك. إنّه مجرد تمثيل لسطح مستوٍ ممتد إلى ما لانهاية. ولكنّنا لم نرسم سوى جزء منها هنا. وهي تتكدّس فوق بعضها. هذا ممتاز.

هذا صحيح تماماً.

ولكن عليّ إخبارك أنّ معظم الناس يقلقون من أنّك إذا مدّدت هذه الغرفة إلى ما لا نهاية في كل اتجاه، لا يبدو أنّه ثمة مساحة كافية لإنشاء عالم كامل وفسيح ثلاثي الأبعاد، لأنّ المساحة كلّها مشغولة أصلاً. ألا يزعجك هذا الأمر؟

أنا أفكر. الأمر يزعجني.

جيّد. جيّد. جيّد. يَسرّني أنّ الأمر يزعجك بعض الشيء على الأقل. ما رأيك؟

طبعاً. نعم.

الأمر يزعجك قليلاً.

سوف يزعجني.

إنّه يزعجك. لأنّ المشكلة هي أنّه بالتناظر، لم تتلامس الأسطح ثنائية الأبعاد، في كل نسختين. لديك مستوى الصفر، ومستوى النصف ومستوى ١. المستوى ١ لا يلتقي بمستوى النصف. ومستوى النصف لا يلتقي بالمستوى صفر. لذا فهي تختلف عن بعضها. ماذا سنفعل إذاً حين تصبح كل المساحة مشغولة؟

هنا يأتي دور ابتكار الأفكار. ما سنفعله هو أنّنا سنفترض أنّ الأمر صحيحاً. هل يمكننا التفكير بالمفهوم الذي سنحصل عليه في حال، استطعنا تكديس أفضية ثلاثية الأبعاد واحد لكل عدد حقيقي، بشرط ألا يتلامس أي اثنين منهما، وفي الوقت عينه أن يكونا قريبين بالقدر الذي تريده، أي أن تأخذ سطحين مستويين قريبين بالقدر الذي تريده؟

ولكنّهما بشكل أو بآخر لا يتلامسان. فلنفترض أنّنا استطعنا فعل ذلك. ونحن نطوّر مفهوماً. وهذا المفهوم هو عبارة عن النتيجة التي ستحصل عليها إذا توصّلت إلى كومة من الأفضية ثلاثية الأبعاد، من دون أن يتلامس أي اثنين منها. لذا ما نفعله هو ابتكار فكرة، والفكرة هي امتداد لفكرة مألوفة. العالم المألوف للأفضية الثلاثية الأبعاد، كومة من الأفضية ثنائية الأبعاد. لذا نقول بالتناظر، إنّه إذا كان في وسعك تكديس أفضية ثلاثية الأبعاد، فقد تحصل على شيء آخر. وتحصل على أربعة--

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٢:	**إنشاء البُعد الرابع بالتناظر**
الموضوع ٢:	**تمثيل الفضاء رباعي الأبعاد**

ها نحن إذاً. لننظر إلى هذا التمثيل للفضاء رباعي الأبعاد. وكما قلت مسبقاً يا مارشال، ليس هناك من صعوبة في تمثيل الفضاء رباعي الأبعاد مثلما فعلنا في السابق.

لدينا فضاء كامل ثلاثي الأبعاد عند المستوى ١، وعند المستوى نصف، وصفر، وناقص نصف، وناقص ١، وكل المستويات الواقعة في ما بينها. كل عدد في ما بينها، أي ربع أو ٣/٨ وما شابه من الأرقام الأخرى. سيكون لدينا فضاء كامل ثلاثي الأبعاد. هذا مفهوم للبُعد الرابع. ولكن كيف سنستكشفه الآن؟ كيف سنأخذ هذا المفهوم ونحوّله إلى واقع بالنسبة لنا، بمعنى أن يصبح مألوفاً ومفهوماً بشكل أفضل بنظرنا؟ كيف عسانا نؤدي هذه المهمة؟

تكمن إحدى الاستراتيجيات في التفكير بالأمور داخل الفضاء ورؤية ما إذا كنا نستطيع فهم هذا التمثيل للعالم. إحدى الاستراتيجيات الهامة جداً لفهم أمور عديدة هي أن تأخذ تمثيلاً لمفهوم أو عالم ما، وقد يكون تمثيلاً غير مألوف، ولكنّه قد يكون مفيداً للتفكير في عالم مألوف بطريقة غير مألوفة.

على سبيل المثال، عندما نتحدّث عن فضاء ثلاثي الأبعاد نفكّر عادةً بكامل الغرفة. ولكن إذا فكّرنا فيه ككدسة من الأفضية ثنائية الأبعاد تكون طريقة تفكيرنا غير مألوفة إنّما مفيدة. فهمت؟

نعم.

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٢:	**إنشاء البُعد الرابع بالتناظر**
الموضوع ٣:	**تمثيل البُعد الرابع بالوقت**

الأستاذ: أعطِني مثالاً مألوفاً نوعاً ما عن البُعد الرابع والذي تعتقد أنّه يشكّل بُعداً رابعاً.

الطالب: أعتقد أنّ الوقت هو--

الأستاذ: الوقت. يعتقد كثيرون أنّ الوقت هو البُعد الرابع. وهذا صحيح إلى حد ما لأنّ الوقت يشكّل نموذجاً رائعاً للبُعد الرابع. فكّر في ما يلي. فكّر في يومك. اليوم، فكّر في هذا اليوم. بدأتَ يومك صباحاً، وكان العالم بأسره موجوداً. وفي وقت لاحق من ذاك اليوم ذهبت إلى مكان ما. وكان العالم بأسره موجوداً. ثم ذهبت إلى مكان آخر. وكان العالم بأسره موجوداً. ففي كل لحظة من الزمن، بدءاً من استيقاظك صباحاً حتى الآن، كان العالم موجوداً. فكّر في كامل هذا المفهوم خلال يومك. بمعنى أو بآخر، هذا هو الفضاء رباعي الأبعاد. صحيح؟ بهذه الطريقة. فكّر في هذه الغرفة. لدينا هذه الغرفة الآن. ولدينا هذه الغرفة الآن. صحيح؟

كما لدينا عالمين كاملين هنا. لذلك لم نواجه أي صعوبة في العثور على مكان لوضع كامل هذه الغرفة من دون أن تلامس الغرفة السابقة. إنّها غرفة كاملة هنا، وغرفة أخرى كاملة هناك. وهذا المفهوم في الواقع هو نموذج جيد للفضاء رباعي الأبعاد. ولكنّه نموذج ناقص. وهو ليس ما سنستكشفه اليوم. والسبب الكامن وراء نقصه هو أنّ الوقت يتّسم بميزة خاصة. فتجربتنا مع الوقت تسير باتجاه واحد فقط. فهو يسير إلى الأمام فقط ولا يمكننا العودة به إلى الوراء للأسف.

هذا أمر مؤسف جداً على فكرة. إنّه خلل في الوقت. ليتنا نستطيع الرجوع في الزمن، ولكنّ الأمر مستحيل للأسف. إنّه بُعد خاص-- لا يرتبط بالفضاء، حيث يمكنك الذهاب في أي اتجاه، أكان ذهاباً وإياباً، أم إلى الأمام والخلف، أم صعوداً وهبوطاً. إنّه يتّسم بميزة خاصة. لذا لا نريد استخدام الوقت كتشبيه للبُعد الرابع. ولكنّه يوضّح مفهوم وجود نسخ منفصلة وغير مؤثرة من--

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٢:	**إنشاء البُعد الرابع بالتناظر**
الموضوع ٤:	**تصوّر الأجسام بالفضاء ثنائي الأبعاد**

حسناً. هذا إذاً تمثيل للفضاء رباعي الأبعاد. لاستكشافه، سوف نلقي نظرة على بعض الأجسام في هذه الأفضية ذات الأبعاد الأدنى، من أجل مساعدتنا على فهم كيف سيبدو شكل الأجسام في البُعد الرابع. فلنبدأ إذاً ونجرّب ما يلي.

أنظر إلى هذه الصورة. تمثّل هذه النقاط هنا جسماً في الفضاء ثنائي الأبعاد على سطح مستوٍ. هل تلاحظ؟ ولم أرسم سوى أجزاء الجسم الواقعة على هذه الخطوط، لأنّني لم أرسم سوى خمسة من المستويات التي تشكّل السطح المستوي.

في حالة السطح المستوي، كنت أستطيع رسمه كاملاً لأنّ الورقة فعلياً هي السطح المستوي بالكامل، وهي تمثيل جيد للسطح بكامله. ولكنّني لم أفعل ذلك. لم أرسم سوى خمسة خطوط. والسبب وراء ذلك هو أنّني أردت الاعتياد على فكرة أنّ الفضاء ذا البُعد الأعلى مكوّن من كومة أفضية ذات بُعد أدنى. لقد تراجعنا إلى البُعد الأدنى.

دَعني الآن أسألك النظر إلى هذا الجسم، وعبر إكمال الفراغ بين المستويات-- أي تلك التي لم أرسمها- هل يمكنك تخمين شكل هذا الجسم؟ ربما ليس شكله دقيقاً، ولكن ماذا قد يكون برأيك؟

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٢:	**إنشاء البُعد الرابع بالتناظر**
الموضوع ٥:	**تصوّر الأجسام بالفضاء ثلاثي الأبعاد**

هل يمكنك تخمين شكل هذا الجسم؟ صحيح أنّه ليس شكلاً دقيقاً، ولكن ماذا قد يكون شكله؟

شكل بقلاوي.

شكل بقلاوي، أو دائري ربما. ولكنّه يبدو شكلاً بقلاوياً أكثر.

يبدو شكلاً بقلاوياً، صحيح. إذاً هو شكل بقلاوي أو دائري، لأنّك خمّنت هذا الشكل على المستوى ٤/١، ثمة نقطتان، والمسافة بينهما أوسع قليلاً. وبين المستوى ١ والمستوى ٢/١، المسافة أقرب بقليل. ولا نعلم كيف تتّصل ببعضها، لأنّنا لم نرسم سوى خمسة مستويات. ولكنّه يشبه الشكل البقلاوي بعض الشيء. فلنراجع الآن هذا الوصف للفضاء ثلاثي الأبعاد.

ما سنفعله هنا هو الاعتياد على رؤية العالم المألوف - بالفضاء ثلاثي الأبعاد- بطريقة غير مألوفة، أي ككومة من الأفضية ثنائية الأبعاد، والتي حدّدت خمسة منها هنا. ولكن لا يغِب عن بالك أنّه ثمة طبقات عديدة لامتناهية بين هذه المستويات. ماذا سيكون شكل هذا الجسم في الفضاء ثلاثي الأبعاد؟

الأسبوع الخامس:	البُعد الرابع
المحاضرة ٢:	إنشاء البُعد الرابع بالتناظر
الموضوع ٦:	التصوّر باستخدام يديك

لا أعلم. أنا في حيرة من أمري-- لأنّني ما زلت أرى شكلاً بقلاوياً، ولكنّني محتار بشأن عدم وجود أي نقاط على المحور العمودي.

طيّب.

ويبدو أنّه ما زال جسماً ثنائي الأبعاد. لا أعلم ماذا تقصد بأنّه ثنائي الأبعاد.

ماذا تقصد؟ ما هذا؟

يبدو أنّه ما زال قابلاً للتمثيل في الفضاء ثنائي الأبعاد رغم أنّه في فضاء ثلاثي الأبعاد.

حسناً. دَعني أطلب منك شيئاً، وأريد من الجميع أن يفعل ذلك معنا. استخدم يديك. اتفقنا؟ المستوى واحد هو سطح مستوٍ. ضع يديك بهذا الشكل. المستوى واحد هو سطح مستوٍ. جيد؟

والمستوى نصف هو سطح مستوٍ. والمستوى صفر هو سطح مستوٍ. المستوى ناقص نصف هو سطح مستوٍ، والمستوى ناقص واحد هو في الأسفل هنا. حسناً؟

لننظر الآن إلى هذه النقاط. اتفقنا؟

نصعد إلى المستوى واحد، وثمة نقطة واحدة في مكان ما. ضَع يدك هناك حيث هي. لننزل الآن إلى مستوى النصف. موافق؟

نقطتان. إنزل إلى المستوى صفر. ومن ثم إلى مستوى ناقص نصف. بعد ذلك إلى المستوى ناقص واحد. ماذا رسمت أطراف أصابعك؟

شكلاً بقلاوياً.

شكلاً بقلاوياً. صحيح.

شكلاً بقلاوياً أو دائرياً.

نحن لا نعرف ما الشكل تماماً، ولكنّه يشبه الشكل البقلاوي تقريباً. المغزى هنا هو أنّ ما رأيته الآن هو عبارة عن شكل بقلاوي. وهو متجه نوعاً ما بشكل عمودي. صحيح؟

هذا الشكل البقلاوي في الفضاء ثلاثي الأبعاد—وقد مثّلناه على هذا الشكل. حسناً؟ هل أنت موافق؟

نعم.

جيد. ولكنّه ما زال شكلاً بقلاوياً مسطحاً، أليس كذلك؟

هذا صحيح.

هذا صحيح. إنّه كناية عن خط رفيع مؤلف من عدة خطوط.

فهمت.

إليك الآن مثالاً عن جسم في الفضاء رباعي الأبعاد. المستوى واحد- عبارة عن نقطة واحدة. المستوى نصف- عبارة عن نقطتين أكثر تباعداً. المستوى صفر- عبارة عن نقطتين. المستوى ناقص نصف- عبارة عن نقطتين. المستوى ناقص واحد- عبارة عن نقطة واحدة. ما هو هذا الجسم في الفضاء رباعي الأبعاد؟

الأسبوع الخامس:	البُعد الرابع
المحاضرة ٢:	إنشاء البُعد الرابع بالتناظر
الموضوع ٧:	الاعتياد على الشرائح

شكل بقلاوي؟

نعم. أقول إنّه شكل بقلاوي.

بالتأكيد. ويُعزى ذلك إلى أنّنا نستطيع -بالتناظر- التراجع إلى الوراء. يمكننا الرجوع إلى فهمنا لكيفية سير الأمور في الفضاء ثلاثي الأبعاد وكيفية سيرها في الفضاء ثنائي الأبعاد. ونرى أنّ البُعد المحيط لم يؤثر في ماهية الجسم. لقد كان شكلاً بقلاوياً-- سوء أكان شكلاً بقلاوياً في سطح مستوٍ أم شكلاً بقلاوياً في فضاء ثلاثي الأبعاد. وللسبب عينه، إنّه شكل بقلاوي في الفضاء رباعي الأبعاد. لقد تعلّمنا--نحن نستكشف الفضاء رباعي الأبعاد عبر التراجع للفضاء ثلاثي الأبعاد والاعتياد على التمثيل غير المألوف للأبعاد الأدنى من أجل الانتقال إلى البُعد الرابع. اتفقنا؟

نعم.

لننظر الآن إلى هذا الجسم. هذا جسم في الفضاء ثلاثي الأبعاد. لا يشبه هذا الجسم -لقد رسمته مجدداً- الأمور التي قد ترسمها أحياناً. على سبيل المثال، إذا نظرت إلى صورة فوتوغرافية أو إلى رسم معين في الفضاء ثلاثي الأبعاد، فأنت لن ترسمه بهذا الشكل. لن ترسم صوراً ذات مستويات متعددة. بدلاً من ذلك، تخيّل أنّك ترى جسماً معيناً في العالم، وتأخذ مستوى هنا وترى كيف يضرب الجسم أو يرتطم بالسطح المستوي. كيف يرتطم بهذا السطح وأي جزء يظهر على هذا السطح المستوي؟ أي جزء يظهر على هذا السطح المستوي؟ أي جزء يظهر على هذا السطح المستوي؟ ومن ثم نجمع النتائج معاً للتوصل إلى الجسم النهائي. اتفقنا؟ هل هذا منطقي؟

وعلى فكرة- أريد أن أذكر أنّ هذه الاستراتيجية المتبعة لتمثيل الفضاء ثلاثي الأبعاد تُستخدَم كل يوم في الطب. هل هذا مألوف عندك؟ ما هي أنواع التمثيل هذه في الطب؟ هل تعلم؟

فحص أشعة للدماغ.

نعم. التصوير بالرنين المغناطيسي. التصوير بالرنين المغناطيسي أو الأشعة المقطعية. هذه شرائح. ينظر الطبيب إلى سلسلة من الشرائح ويرى كيف-- مهما كان الأمر الذي يبحث عنه- ينظر إلى العظام. كيف تبدو العظام عند هذا المستوى وذاك، وهكذا دواليك- بغية معرفة ماذا يجري، ومن ثم يتخيل شكل الجسم ثلاثي الأبعاد. مفهوم؟ ما هو هذا الجسم في الفضاء ثلاثي الأبعاد؟

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٢:	**إنشاء البُعد الرابع بالتناظر**
الموضوع ٨:	**شرائح البُعد الرابع**

يشبه شكلاً مخروطياً أو ربما- شكلاً بقلاوياً نوعاً ما.

نعم.

أو ربما شكلاً كروياً.

ربما شكلاً كروياً

حسناً. طيّب. لمَ لا تطبّق ما تعلّمناه باليدين مجدداً. عليك أن تستخدم يديك. وأنا أعني الجميع. على الجميع استخدام أيديهم. إن لم تتحرك أيديكم فهذا يعني أنّكم لا تولون انتباهاً.

حسناً.

استخدم يديك إذاً. ماذا ترى عند هذا المستوى؟

نقطة.

نقطة. وعند المستوى نصف أدناه، ماذا ترى؟

دائرة.

دائرة. دائرة صغيرة. ماذا ترى عند المستوى ٠؟

دائرة أكبر حجماً.

دائرة أكبر حجماً. ماذا ترى عند المستوى ناقص نصف؟

دائرة أصغر حجماً.

دائرة أصغر حجماً. ماذا ترى عند ناقص واحد؟

نقطة.

ماذا وصفت إذاً؟

مثلما قلت. شكلاً كروياً.

هل تعتقد أنّه شكل كروي؟

ثمة مشكلة واحدة.

لقد قلت إنّه شكل كروي، وهذا في الحقيقة جواب جيد، ولكنّني سوف أراوغ قليلاً. نحن في جامعة تكساس في أوستن. وأحد الأمور التي تشتهر بها جامعة تكساس في أوستن، رغم أنّها لا تبلي فيها بلاءً حسناً هذه السنة هي كرة القدم. وكرة القدم هي بالطبع كرة قدم. هيا، إنّها كرة قدم. إنّها تنزل على هذا النحو. إنّها كرة قدم.

لا عليك، لا عليك.

قلنا إذاً إنّه شكل كروي أو كرة قدم إذا كنت من هواة هذه اللعبة. ها نحن إذاً. ما شكل هذا الجسم في الفضاء رباعي الأبعاد؟

الأسبوع الخامس:	البُعد الرابع
المحاضرة ٢:	إنشاء البُعد الرابع بالتناظر
الموضوع ٩:	مفهوم البُعد

هل ما زال شكلاً كروياً؟

نقطة، دائرة، دائرة، نقطة. هذا لا يمتدّ على-- إنّها مجرد دائرة.

طيّب. ما هذا الجسم إذاً؟

كرة قدم.

كرة قدم. تماماً. هل ما زلت تعتبره كرة قدم رباعية الأبعاد؟

كلا.

وعلى فكرة، حرصت ألا أسمح لك- حاولتَ التفكير بأنّه شكل بقلاوي ثنائي الأبعاد. وأنا لا أريدك أن تفكّر بهذه الطريقة. ويُعزى سبب ذلك إلى أنّه علينا تحديد ما نعنيه حين نتحدّث عن بُعد جسم ما. هل سنعتبر أنّ الجسم هو البُعد الذي يقع فيه؟ كالدائرة مثلاً. هل هو جسم ثنائي الأبعاد، أو أنّه جسم أحادي البُعد؟ لأنّها في جوهرها رقيقة للغاية. إنّها مثل خط. ولكن بما أنّها دائرة، فعليها أن تقع على السطح المستوي. هل ستدعوها ثنائية الأبعاد؟ هل ستدعوها ثلاثية الأبعاد؟ لهذا السبب نريد تجنّب هذه المناقشة. نحن نتحدّث فقط عن بُعد الفضاء الإقليدي، عن الخط، والسطح المستوي، والفضاء ثلاثي الأبعاد، والفضاء الإقليدي رباعي الأبعاد. بالمناسبة، ثمة نظرية كاملة وهي مذهلة حقاً، تُدعى نظرية الأبعاد، حيث تحدّد كيف ستصِف بُعد الأجسام. وهي استكشاف رائع حقاً.

تكمن فكرة هذا الاستكشاف بأخذ مفهوم البُعد بدءاً من مفهوم بُعد الفضاء الإقليدي، والبحث في طريقة تطبيق هذا المفهوم، بالتناظر، على تلك الأجسام مثل الدائرة أو الشكل الكروي أو غيرها. وثمة طرق عديدة لتطبيقه أيضاً. ثمة استراتيجيات مختلفة تعطي مفاهيم مختلفة. وفي الواقع، هناك العديد من المفاهيم المختلفة للبُعد. ولكنّها موضوع مختلف تماماً لن نناقشه اليوم. غير أنّه سؤال سديد فعلاً.

جيد.

الأسبوع الخامس:	البُعد الرابع
المحاضرة ٣:	سارق رُباعي الأبعاد
الموضوع ١:	كتاب في خزنة

أودّ أن أقول الآن إنّ العديد منكم سيعيش أو أنّه يعيش أصلاً حياةً بنّاءة، وأتمنى هذه الحياة لكم جميعاً، ولكن هناك بعض الأشخاص الذين- لا أعلم كيف أصيغ كلامي بعبارات لطيفة، ولكنّهم سارقون. يحبّون سرقة الأشياء.

إنّها مشكلة.

إنّها مشكلة.

إذا أردت أن تصبح سارقاً في البُعد الرابع- فهذه مهنة ممكنة.

نريد تلبية احتياجات الجميع، لذا نودّ التحدّث معك إذا كنت تريد أن تصبح سارقاً في البُعد الرابع.

كيف يمكن ذلك؟

تخيّل أنّه ثمة خزنة أمامك هنا، مصنوعة من حديد بسماكة ٤ إنش.

إنّها سميكة جداً ومغلقة تماماً، ولكن في الداخل ثمة غرض ثمين جداً- مثل كتاب رياضيات مثلاً.

نعم.

أجل.

حقاً. هناك كتاب رياضيات في الداخل.

أنت إذاً سارق مهتم بالرياضيات، لذا تريد بشدة سرقة كتاب الرياضيات هذا. ولكنّك لسوء الحظ كائن رباعي الأبعاد فهل يمكنك سرقة كتاب الرياضيات هذا من الخزنة من دون فتحها؟

لنفترض أنّ هذا الشكل الكروي الصلب ثلاثي الأبعاد يقع عند المستوى ٠ من الفضاء رباعي الأبعاد. المستوى ٠ من الفضاء رباعي الأبعاد هو فضاء ثلاثي الأبعاد.

يمكنك إذاً وضع كامل هذه الخزنة الصلبة في فضاء ثلاثي الأبعاد.

هذا هو سؤالي لك. إذا كنت سارقاً رباعي الأبعاد، هل يمكنك سرقة الكتاب من دون فتح الخزنة؟ كم يبلغ حجم الخزنة؟

إنّها بهذا الحجم.

الأسبوع الخامس:	البُعد الرابع
المحاضرة ٣:	سارق رُباعي الأبعاد
الموضوع ٢:	السرقة بالتراجع

حسناً. تذكّر كيف تقارب مسألةً لا تعرف حلّها في البُعد الرابع. ليس هناك سوى طريقة واحدة للتصرّف. وما هي؟ الرجوع إلى البُعد الثالث.

التراجع. الجأ إلى مفهوم التراجع. هذا صحيح تماماً. تراجع إلى الحالات ذات الأبعاد الأدنى لأنّك بهذه الطريقة ستعلّم نفسك درساً يتيح لك التعامل مع البُعد الرابع المعقد. ماذا يعني هنا التراجع إلى حالة البُعد الأدنى؟
يمكننا التفكير بشأن كل مستوى من البُعد الثالث على أنّها مستويات من البُعد الثاني.
جيد جداً. ها نحن إذاً.

إليك صورة عن خزنة في البُعد الثاني. ويمكنك أن تلاحظ أنّها في المستوى ٠ من الفضاء ثنائي الأبعاد. إنّها خزنة بمعنى أنّك إذا كنت كائناً ثنائي الأبعاد، لا يمكنك دخول هذه الخزنة. لو كنت تعيش على هذا العالم المسطح ثنائي الأبعاد، لكان اختراق الخزنة مستحيلاً. ولكان إخراج هذا الكتاب المسطح تماماً مهمة مستحيلة ما لم تفتح باب الخزنة.

إذاً هذه خزنة صلبة ومنيعة بالنسبة لكائن ثنائي الأبعاد يعيش في هذا العالم المسطح. ولكن لنفترض أنّك كنت كائناً ثلاثي الأبعاد- وهذا هو الواقع- ماذا كنت لتفعل؟
ستلتقطه ببساطة.
إذا استطعت. ليست المهمة غاية في السهولة. ماذا عندها؟
عندها تحصل عليه.
ولكن أين ستحرّكه في هذا الرسم للفضاء ثلاثي الأبعاد؟ وكيف ستحرّكه؟
أعتقد أنّ رفعه سيكون معادلاً لتحريكه إلى مستوى أعلى.

صحيح. هذا صحيح تماماً. فكّر بسطح الطاولة هذا على أنّه المستوى ٠ للفضاء ثلاثي الأبعاد. إنّه إذاً فضاء ثنائي الأبعاد عند المستوى ٠ ولديك كتاب الرياضيات الثمين هذا القابع عند هذا المستوى، ليس هناك أسهل من الإمساك به ورفعه إلى مستوى أعلى.

وفي هذا الرسم، يعني ذلك أن ترفعه إلى هنا. ولم يمرّ من هنا قط- يبدو الأمر سخيفاً بعض الشيء حين تنظر إليه بهذه الطريقة- لديك هذا المربع الصغير المرسوم عند المستوى ٠ ولكن لا شيء يمنعه من الارتفاع. لا تخترق هذا الجدار. بات بإمكانك الآن سرقة كتاب الرياضيات هذا الكائن داخل خزنة حديدية صلبة عند المستوى ٠ من فضاء رباعي الأبعاد، وهو داخل فضاء ثلاثي الأبعاد داخل الخزنة. كيف ستُخرجه؟

مدّ يدك وأمسكه وحرّكه صعوداً إلى مستوى جديد.

صحيح. عبر التراجع، سمحت لنفسك بفهم ما يحدث لإدراك أنّ هذا الحاجز الحديدي الصلب، والذي يشكّل حاجزاً حين تكون شخصاً ثلاثي الأبعاد يحاول اختراق هذه الخزنة ثلاثية الأبعاد التي تمنعك من الوصول إلى هذا الكتاب الرائع.

بدلاً من ذلك، تدرك أنّه انطلاقاً من البُعد الرابع، ليس هناك ما يعرقلك أو يمنعك من مدّ يدك ورفع الكتاب إلى مستوى أعلى من الأبعاد الرباعية. وعندها يمكنك تحريكه، وإعادته إلى مكانه إذا أدرت. بالمناسبة، إذا كنت جراحاً رباعي الأبعاد، وأردت استئصال الزائدة الدودية لشخص ما وهو كائن ثلاثي الأبعاد هنا وأنت جراح رباعي الأبعاد، ماذا في وسعك فعله؟

ليس عليك سوى مدّ يدك والإمساك بها.

هذا صحيح تماماً. لا داعي لإجراء أي شق. يمكنك إزالة الزائدة الدودية من دون أي شق. لن يقف الجلد حاجزاً أمامك. يمكنك بلوغ الزائدة بسهولة. يمكنك رؤية دماغ الشخص وزائدته الدودية. لا مشكلة، يمكنك إخراجها ببساطة. هذا غريب بعض الشيء، أليس كذلك؟

ولكنّه مفيد لو كان لديك جرّاح رباعي الأبعاد.

لكان الأمر مفيداً جداً.

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٤:	**أهلاً بك في الأرض المسطّحة**
الموضوع ١:	**رحلة ثقافية إلى الأرض المسطّحة**

يُعتبر البُعد الرابع بُعداً معقداً وغير مألوف مقارنةً بفضائنا ثلاثي الأبعاد المألوف. وإذا رجعت بُعداً واحداً لتصل إلى الفضاء ثنائي الأبعاد، تجد أنّ هذا العالم ليس مألوفاً مثل الفضاء ثلاثي الأبعاد. ولكنّه أبسط منه. لذا قد يكون استكشاف السطح المستوي للفضاء ثنائي الأبعاد كعالم قائم مفيداً في فهم البُعد الرابع، بمعنى أنّه قد يفيدنا في دراسة عالم غير مألوف ولكنّه أكثر بساطة. فلنبدأ باستكشاف هذا الفضاء.

في الواقع، سأعطيكما كليكما قطعة ورق. جولي، هلّا ترسمين مارشال هناك؟ ومارشال، هلّا ترسم جولي؟ ولكن أريد منكما أن ترسما بعضكما بطريقة مختلفة عن الحقيقة. افرضا أنّ عالمكما كلّه هو هذا السطح المستوي، وأنتما كائنان ثنائيا الأبعاد.

بكلمات أخرى، لا يمكنكما النظر إلى فوق. ولا إلى تحت. هذا السطح المستوي هو كامل عالمكما. إنّها الأرض المسطحة.

على فكرة، ثمة كتاب شهير جداً اسمه "**الأرض المسطحة**" كتبه إدوين أبوت في العام ١٨٨٤ على ما أعتقد. وهذا الكتاب رائع إذ يصِف طريق التفكير بالأبعاد. وهو يرمز إلى إنجلترا، والمجتمع الإنجليزي في ذاك الوقت. وهي رواية ساخرة تتناول مختلف طبقات المجتمع في ذاك العصر. لذا فهو نوع من النقد الاجتماعي. ولكنّ الأمر الشيّق من ناحية الرياضيات والأبعاد هو أنّه يتحدّث عن مختلف الأبعاد الكائنة وطريقة التفكير بالأرض المسطحة.

كما هناك فيلم رائع حول هذا الموضوع. لا بل عدّة أفلام. ولكن هناك فيلم جديد أعدّه بعض الأشخاص من جامعة تكساس هنا. وهم طلاب متخرجون من جامعة تكساس. وقد صنعوا هذا الفيلم الرائع بعنوان "**الأرض المسطحة**"، والذي أوصيك بشدة أن تشاهده. إنّه فيلم رائع يصِف الكتاب، بطريقة الرسوم المتحركة. ولكنّه فيلم متقن جداً.

على أية حال، سوف تستمتع بالكتاب لصغره وسهولة قراءته، بالإضافة إلى الفيلم بعنوان "**الأرض المسطحة**".

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٤:	**أهلاً بك في الأرض المسطّحة**
الموضوع ٢:	**الرسم في الأرض المسطّحة**

ولكن في هذه الأثناء، أودّ منك التمرّن على ما يلي، افترضي أنّك كائن محاصر في سهل مسطّح. كل ما يمكنك فعله، لا يمكنك النظر إلى الأعلى ولا الأسفل، أنت محاصرة في السهل المسطّح. كيف عساك ترسمين مارشال؟ أنت ارسمي مارشال، ومارشال ارسم جولي. أريد أن أرى رسمك لها.

بكلمات أخرى، بما أنّ قطعة الورق أرض مسطحة، يمكنك رسم شكلها انطلاقاً من موقع مراقبتك ككائن ثلاثي الأبعاد، أنت إذاً تنظر إلى عالم الأرض المسطحة ذاك في الأسفل. كيف سيبدو شكلها، وكيف سيبدو شكله؟ ارسم الوجه. هل يمكننا اختيار سطح ما؟

نعم، الورقة.

صحيح، ولكن انطلاقاً من كونها كائناً ثلاثي الأبعاد. لا، ليست كائناً ثلاثي الأبعاد، لا. أنا أفترض أنّكما كلاكما شخصان في الأرض المسطحة. أنتما كائنان في الأرض المسطحة. لستما إذاً كائنين بأبعاد ثلاثية، بل كائنين في الأرض المسطحة. وأردت منكما أن ترسما بعضكما. كيف ستبدوان في الأرض المسطحة التي هي عالمكما. وكيف ستبدوان من الأعلى. تفضّلي، ارسميه. اختبري مهاراتك.

أحسنت، أحسنت. وهل تريدين أن تضعي..؟ طيّب، جيد. هذا مارشال إذاً؟

هذا مارشال، حسناً.

جميل.

جولي، هل أنت فنانة؟

نعم.

أنت فنانة؟

كيف علمت؟

لم أكن أعلم، ولكنّني أريد إبداء بعض الملاحظات عن رسم جولي لمارشال هنا. أنظري يا جولي ماذا فعلتِ هنا. أولاً، لاحظي أنّ عينيه هنا. لنرَى ما يمكنهما رؤيته، كل ما يستطيعان رؤيته هو داخل رأس لأنّهما تقعان في الواقع داخل رأسه. كما لو كنا كائنات ثلاثية الأبعاد تقع مقلتا عيوننا في وسط دماغنا. لن نتمكن من رؤية أي شيء. إنّه مارشال استبطاني جداً، فكل ما يراه هو نفسه، لا يستطيع رؤية ما في الخارج. لذا لا يمكنك رسم عينيه في الداخل على هذا النحو، اتفقنا؟ هل ترين المشكلة؟

ألاحظ مشكلة أخرى هي أنّك وضعت فمه في الداخل. فإذا كان يريد تناول بعض الطعام الموجود أمامه، لن يستطيع الوصول إليه لأنّ فمه في الداخل. وربما هذا هو سبب نحافته، أنظري كم هو نحيف. ذلك لأنّه لا يستطيع تناول أي طعام. في الواقع، رسمته بطريقة تحتّم نهايته عمّا قريب. فهو يحتاج لتلك الأجزاء الحيوية مثل عينيه وفمه، التي تحتاج إلى اتصال بالعالم الخارجي.

هذه ستكون صورة أفضل لمارشال. هاتان عيناه تنظران إلى الخارج على هذا النحو، وهذا أنفه بهذه الطريقة، وهذا فمه. هذا ذقنه. هذه أذنه هنا. إنّها صورة أفضل حال. وها هو دماغه هنا. ها نحن إذاً. وسوف ندعوه مارشال.

هذا جذّاب.

لأنّه يستطيع أن يرى الخارج، لأنّ عينيه منفتحتان على الخارج، وأذنه أيضاً، وفمه، هل في وسعه إدخال الطعام هنا؟

هذه هي الطريقة. هذا مثال على التفكير بعالم غير مألوف، وهو العالم ثنائي الأبعاد، هذا الفضاء غير المألوف، مع محاولة التفكير بالعناصر الضرورية للتمكّن من التفاعل مع ذاك العالم. مارشال لديه صورة لجولي هنا. لا بأس بها، فالعينان خارجاً، ومن يعلم. هل هاتان أذناها؟

نعم، لم يتسنى لي رسم الأنف والفم.

لم يتسنى لك رسم الأنف والفم. جيد جداً. إنّه رسم ممتاز وجذاب.

جذاب جداً.

طيّب، شكراً.

حسناً.

الأسبوع الخامس:	البُعد الرابع
المحاضرة ٥:	المكعّب الزائدي
الموضوع ١:	التراجع لبناء مكعّب رُباعي الأبعاد

طرح مارشال سؤالاً عمّا قد يبدو عليه شكل مكعب رباعي الأبعاد. سوف أسأل كليكما من أجل البحث في المسألة، كيف عساكما تقوما بتطوير فكرة مكعب رباعي الأبعاد؟ كيف تفكّران في المسألة؟

ليس هناك سوى جواب واحد صحيح. سأعطيكما تلميحاً.

ليس هناك سوى جواب واحد صحيح. وينبغي للجميع أن يملك الجواب أيضاً. ما هو الجواب الوحيد الصحيح لطريقة تطوير فكرة مكعب رباعي الأبعاد؟

التراجع.

نعم، التراجع.

التراجع، تماماً.

التراجع. وماذا يعني ذلك في هذه الحالة؟

النظر إلى تمثيل المكعب ثلاثي الأبعاد ككومة ثنائية الأبعاد.

بالضبط. هذا صحيح تماماً. بكلمات أخرى، نأخذ هذا الجسم المألوف، أي المكعب، والذي يمكننا في الواقع تصوّره. يمكنك رسم مكعب كامل هنا. ولكن ليست هذه الطريقة التي علينا النظر بها إلى الفضاء رباعي الأبعاد. لا يمكننا رؤية الجسم كشكل متكامل. بل نفكّر فيه كشرائح عدة. بالتالي، نريد أخذ المكعب المألوف والنظر إليه بطريقة غير مألوفة إلى حد ما، أي التفكير في الفضاء ثلاثي الأبعاد كأكوام من الفضاء ثنائي الأبعاد، ورؤية ما قد يبدو عليه ذاك المكعب. كيف سيبدو شكل المكعب إذاً؟

هذه صورة لفضاء ثلاثي الأبعاد ككومة من الأفضية ثنائية الأبعاد. كيف سيبدو شكل المكعب؟

سيكون عبارة عن مربعات.

مربع، مربع، مربع، مربع.

هذا صحيح.

إذا كان لديك مكعب هنا على الطاولة، سيكون الأسفل مربعاً، مربعاً، مربعاً، مربعاً، مربعاً. إذا كان مكعباً صلباً، سيكون عبارة عن مربعات صلبة من الأعلى إلى الأسفل.

ها نحن إذاً. جيد جداً. لدينا هنا صورة خاصة بنا للمكعب. ولكن لا يغِب عن بالك أنّ هذا رسم لمكعب ثلاثي الأبعاد، وهو جسم مألوف جداً، إنما مرسوم في المستوى الرابع.

ممتاز.

كيف سيبدو شكل المكعب رباعي الأبعاد؟ كيف عسانا نرسم مكعباً رباعي الأبعاد؟

بالمناسبة، يُدعى المكعب رباعي الأبعاد أحياناً مكعباً زائدياً. هذا جميل. كيف عساك إذاً أن ترسم مكعباً رباعي الأبعاد؟ جولي؟ ألن يكون هناك مكعب ثلاثي الأبعاد في كل مستوى؟

حسناً.

ما رأيك؟

نعم، هذا يبدو منطقياً.

يبدو منطقياً، صحيح.

ولمَ هذا صحيح؟

لأنّه عندما كنا نتحدث عن مكعب ثلاثي الأبعاد، لجأنا إلى البُعد الثاني. كان لديك قسم واحد على ما أعتقد.

وماذا كان كل قسم؟

مربع.

مربع.

والمربع على فكرة هو مثل مكعب في بُعد أدنى. لذلك فهذا صحيح تماماً. لرسم مكعب في البُعد الرابع، سيتألف المكعب رباعي الأبعاد من مكعب في كل مستوى. لنفرض أنّنا بدأنا عند المستوى ناقص ١. سيكون هناك مكعب صلب عند المستوى ناقص نصف. مكعب صلب، مكعب صلب، مكعب صلب. هذا سيكون مكعباً. ما أودّ فعله الآن هو استكشاف هذا المكعب الصلب بالطريقة التالية.

أودّ منك أن تفكر بإمكانية فتح المكعب. هل تعلم ماذا أقصد بفتح المكعب؟ فتح مكعب ثلاثي الأبعاد؟

افترض أنّني طلبت منك فتح مكعب رباعي الأبعاد. ماذا كنت لتفعل؟

كنت لأفتح مكعبات ثلاثية الأبعاد من مكعب رباعي الأبعاد.

كلا.

ماذا كنت لتفعل لو سألتك كيف عساك تفتح مكعباً رباعي الأبعاد، ماذا كنت لتفعل؟

كنت لأتراجع.

تماماً.

هذا تماماً ما كنت لتفعله.

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٥:	**المكعّب الزائدي**
الموضوع ٢:	**حدود المكعّب رُباعي الأبعاد**

بالطبع كنت لتتراجع. وماذا يعني التراجع؟

فتح مكعب ثلاثي الأبعاد.

صحيح. فتح مكعب ثلاثي الأبعاد. ماذا يعني ذلك بالمناسبة؟ هل سبق أن فعلت ذلك؟

التراجع.

لا، بالنسبة لمكعب ثلاثي الأبعاد. هل سبق أن فعلت ذلك؟

نعم.

وكيف تبدو النتيجة؟

تحصل على شكل صليب. أربعة مربعات ومن ثم اثنين. أعتقد أنّ الأمر لا يهمّ.

هل أنت تفتح مكعباً حقيقياً؟ هل تفتح مكعباً صلباً؟

لا

لا. ماذا تفتح فعلاً؟

محيط المكعب. حدود المكعب.

فحين أقول فتح مكعب رباعي الأبعاد، حتى السؤال لم يكن دقيقاً. فما تفتحه فعلاً هو حدود مكعب ثلاثي الأبعاد حين فتحته وحصلت على نمط الصليب. يشير هذا الأمر إلى ضرورة طرح السؤال بصيغة أصحّ، ليصبح:

كيف يمكننا فتح حدود مكعب رباعي الأبعاد؟ أي سؤال يخطر في البال عندها؟

كيف يمكن فتح حدود مكعب ثلاثي الأبعاد؟

هذا صحيح بكل تأكيد.

صحيح، وسوف نقوم بذلك بعد دقيقة. ولكن أي سؤال أساسي يُطرح بشأن البُعد الرابع؟ ما هي الحدود؟ ما هي الحدود؟

صحيح. ما هي الحدود؟

كيف سنجيب إذاً على السؤال المتعلق بحدود المكعب رباعي الأبعاد؟ كيف نتوصّل إلى فهم ذلك؟

سوف نتراجع.

سوف نتراجع. هذا صحيح تماماً. إلامَ سنتراجع؟ أي قيمة نتوقّع الحصول عليها؟

سنرجع إلى مكعب ثلاثي الأبعاد.

نعم. ثم كيف سنتفحّص المكعب ثلاثي الأبعاد؟

كأكوام لأجسام ثنائية الأبعاد.

صحيح. وحين نحصل على صورة هذا المكعب ثلاثي الأبعاد، هذا تمثيل لمكعب ثلاثي الأبعاد. والسؤال الفعلي الذي نحاول فهمه هو معرفة حدود المكعب رباعي الأبعاد. ولكنّنا نتّبع استراتيجية مجدية تقضي بالتراجع وسؤال أنفسنا ما هي حدود المكعب ثلاثي الأبعاد؟

لو كان هناك مكعب حقيقي أمامنا، لكان من السهل أن نرى حدوده. ولكنّ السؤال المطروح هو هل يمكننا تفحّص المكعب ثلاثي الأبعاد في هذا الرسم كمستوى مؤلف من مجموعة مربعات مكومة فوق بعضها، ووصف حدود هذا الجسم؟ أخبرني. أين هي حدود هذا المكعب ثلاثي الأبعاد؟

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٥:	**المكعّب الزائدي**
الموضوع ٣:	**فتح مكعّب ثلاثي الأبعاد**

أحد الجوانب سيكون كل هذه الخطوط.

هذا صحيح، هذا صحيح.

في الواقع، سوف أتفحّص جانبين من المكعب. وسأبدأ بالجانبين الأبسط. الأعلى والأسفل.

الأعلى والأسفل. صحيح. لنبدأ بهذا هنا.

رقم ١، الجانب العلوي لهذا المكعب- لو كان لدينا مكعّب هنا، لكان المستوى العلوي وجهاً من ذاك المكعب. إنّه جزء من الحدود. إنّه مربع يشكّل حدود المكعب.

ما هو الجانب الآخر؟

الأسفل.

الجانب السفلي. لنفعل هذا.

صحيح، الأسفل هو وجه آخر. ماذا الآن؟

هذا الجانب وذاك.

طيّب، لنأخذ كل جانب على حدة. هذا الجانب هو المرحلة الثالثة. وما هذا على فكرة؟ هل يمكنك فعل ذلك بيديك؟ هل يمكنك فعل ذلك بيديك؟ أين ذلك إذا أردت استخدام يديك؟

إنّه هنا، وهنا، وهنا وهنا.

صحيح. إنّه المكعب.

ما هو إذاً؟ قطعة مستقيمة؟ ما هو الشكل بكامله؟ ما هو شكله؟

نعم.

ما هو شكله؟

مربع.

إنّه مربع، صحيح.

إنّه مربع عمودي.

إنّه مربع.

هذا الرقم ثلاثة. حسناً، ماذا بعد؟

ثمة الجانب الآخر.

الجانب الآخر. الرقم أربعة هو هنا في الأسفل. أكرّر أنّه مربع مؤلف من كومة خطوط. طيّب، ماذا بعد؟

الوجه العلوي لكل مربع.

الوجه العلوي لكل مربع هو مربع آخر.

هذا الرقم خمسة. ماذا أيضاً؟

الوجه السفلي لكل مربع.

الوجه السفلي لكل مربع يشكّل مربعاً آخر- مربعاً عمودياً. وهذه هي المربعات الستة التي تشكّل وجه المكعب.

هذه هي إذاً المربعات الستة التي تشكّل وجه المكعب. اتفقنا؟

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٥:	**المكعّب الزائدي**
الموضوع ٤:	**تراجع: افتح حدود مكعّب ثلاثي الأبعاد**

ما نحاول فعله الآن هو معرفة حدود المكعب رباعي الأبعاد. لننظر إلى صورة المكعب رباعي الأبعاد لدينا. ها هي.

إنّها كومة من مكعبات ثلاثية الأبعاد. وأول ما أريد السؤال عنه هي حدود هذا المكعب. ممَّ هو مصنوع؟ ما هي قطعه؟

أعتقد أنّها عبارة عن مكعبات.

مكعبات، صحيح. وما الذي يدفعك للاعتقاد بأنّ كل جزء منها سيكون مكعباً صلباً؟

سبق وقلنا إنّ المكعب ثلاثي الأبعاد مؤلف من مربعات ثنائية الأبعاد. لذا من المفترض أن يتألف المكعب رباعي الأبعاد من مكعبات ثلاثية الأبعاد. وماذا عن حدود المكعب ثلاثي الأبعاد؟ ممَّ تتألف؟

تتألف الحدود أيضاً من مربعات ثنائية الأبعاد.

صحيح. تماماً.

رغم أنّه كان جسماً ثلاثي الأبعاد.

صحيح. لدينا الآن جسم رباعي الأبعاد، بحدود ثلاثية الأبعاد. جيد جداً. مكعبات ثلاثية الأبعاد. هل يمكنك النظر إلى صورة المكعب رباعي الأبعاد هذه أخبرني أين هي تلك الأوجه المكعبة؟

في ما سبق، توصّلنا نوعاً ما إلى حدود المربع ومن ثم كدّسناه للحصول على- كانت حدود المربع عبارة عن خط، ومن ثم أكوام من الخط. لنبدأ من الأول. ما هو مثال على هذه المكعبات التي ستشكّل حدود هذا المكعب ثلاثي الأبعاد؟

الوجه العلوي لكل منها سيكون-

حسناً، هذا صحيح. ولكن ما هي الأوجه الأبسط؟ أو ما هي الأوجه التي تفحّصناها في البداية؟ الأعلى؟

كامل المكعب.

كامل الوجه العلوي للمكعب، صحيح. كامل الوجه العلوي للمكعب، الوجه العلوي الصلب للمكعب، هو أحد الأوجه المكعبة لهذا المكعب. ماذا عن الجانب الآخر؟

الأسفل.

الأسفل. الأسفل هو-- المكعب الصلب في الأسفل هو أحد الأوجه. لأنّ المربع السفلي، بالتناظر، كان أحد المربعات التي شكّلت حدود مكعب ثلاثي الأبعاد. أعطني الآن يا مارشال مثالاً آخر على وجه ثلاثي الأبعاد.

الوجه العلوي لكل مكعب.

حسناً، الوجه العلوي لكل مكعب. الوجه العلوي لكل مكعب.

على فكرة، الوجه العلوي لكل مكعب هو مربع بحدّ ذاته. كل واحد من هذه هو بشكل فردي مربع، مربع، مربع، مربع، مربع. إذا أخذت مكعباً، وصار عندك مربع آخر، ومربع غيره، وهكذا دواليك، علامَ تحصل؟

مكعب.مكعب صلب. هذا في الواقع مكعب صلب. جيد جداً. ماذا بعد؟

الوجه السفلي.

الوجه السفلي. طيّب، الأسفل، الأسفل، الأسفل، الأسفل. هذا الرقم أربعة. مرةً أخرى، إنّه مربع، مربع، مربع، مربع، مربع. هذا يشكّل مكعباً، مكعباً صلباً. ماذا بعد؟

الوجه الأيسر.

الوجه الأيسر. ينتهي الأمر هنا في الخلف. خمسة، خمسة، خمسة، خمسة، خمسة. على الجانب، هذا مكعب صلب آخر. بالمناسبة، لا يبدو شكله جيداً وهو قابع على هذا الشكل، أليس كذلك؟

بوم، بوم، بوم.

لا

لا يبدو صحيحاً أليس كذلك؟

لا. لا يبدو صحيحاً.

لنفكّر في ما يلي. لنفترض أنّنا عدنا إلى صورتنا للفضاء ثلاثي الأبعاد ككومة من الأفضية ثنائية الأبعاد. ومن ثم نأخذ قطعة مستقيمة، ربما قطعة مستقيمة متخالفة إنما متشابهة تماماً في كل مستوى. ما هو هذا الجسم؟ استخدم يديك، على فكرة. مثل سطح مستوٍ؟

إذا كان يبدأ هنا فقط، فهو مجرد قطعة. ولديك القطعة نفسها عند كل من هذه المستويات من ناقص ١ إلى زائد ١. استخدم يديك.

هذا المستوى- استخدم يديك. أمسك بقلم ربما. أمسك بقلم. لنفترض أنّ السطح المستوي هو الأسفل، عند مستوى ناقص ١. تفضّل وأخبرني ما الذي يمكنك جرّه من هنا. ما الذي يمكنك جرّه؟

لنفترض أنّ طوله هو- مربع؟

نعم، مربع.

نعم، إذا كان الطول يساوي الارتفاع الذي تستخدمه. صحيح؟

نعم

لا يهم إن لم تكن على هذا النحو. لا يجب أن تكون بالضرورة عمودية أو أفقية. قد تكون في أية زاوية. حين تجرّها، تحصل على مربع حقيقي. موافق؟

نعم.

لهذا السبب، بالتناظر، حين تجرّ مربّعاً، أحد هذه الأوجه، حين تجرّ ذاك المربع، لا يهمّ إن كان عمودياً. جرّه، وستحصل أيضاً على مكعب متعامد فعلي. ستحصل على مكعب صلب عادي. لن تحصل على شكل ملتوٍ أو ما شابه.

مرةً أخرى، بالتناظر، نتراجع وننبهر بالنتيجة. هل يهم بأي اتجاه كانت قطعتي المستقيمة حين جررتها؟

لا.

في حالتي ستحصل على مربع.

ممتاز. هذا الرقم خمسة. ماذا عن الرقم ستة؟

الجانب الأيمن. ستة، ستة، ستة، ستة، ستة.

جيد جداً.

هذا مكعب صلب آخر لأنّه مجموعة من هذه الأوجه.

هذا جيد. ماذا الآن؟

في الخلف.

الخلف، حسناً.

السابع هو في الجهة الخلفية.

جيد جداً.

والجهة الأمامية.

الجهة الأمامية. ثمانية، ثمانية، ثمانية، ثمانية، ثمانية، ثمانية. كم وجهاً مكعباً ثلاثي الأبعاد على حدود المكعب رباعي الأبعاد؟

ثمانية.

ثمانية. ثمانية.

رائع.

صحيح.

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٥:	**المكعّب الزائدي**
الموضوع ٥:	**فتح حدود مكعّب رباعي الأبعاد بالتناظر**

لنتحدّث الآن عن فتح حدود مكعب رباعي الأبعاد. لدينا مكعب رباعي الأبعاد، ونريد فتح حدوده. كيف عسانا نفعل ذلك؟

سبق أن حدّدنا ما هي الحدود. ولكنّنا لم نفتحها. يعني فتح المكعب على فكرة- إلامَ يشير فتح حدود مكعب ثلاثي الأبعاد؟

نفصل الأجزاء، ومن ثم نضعها بشكل منبسط.

نعم.

بحيث أنّنا بعدما نفتح المكعب، ينبسط على السطح المستوي. إذا أخذنا حدود مكعب ثلاثي الأبعاد وفتحناها، تصبح جسماً على السطح المستوي.

طيّب. إذا كنّا نحاول فتح حدود مكعب رباعي الأبعاد، ماذا علينا فعله؟ هلّا تجيب بصوت مرتفع؟

التراجع، طبعاً.

التراجع. التراجع. وماذا يعني ذلك؟ ماذا يعني التراجع؟

الانتقال إلى بُعد أدنى تعرفه مسبقاً.

حسناً. هذا واحد. هذا مكعب ثلاثي الأبعاد. كيف عسانا نفتح حدود مكعب ثلاثي الأبعاد عند النظر إلى هذه الحدود في هذا الرسم. لأنّنا إذا نظرنا إلى حدود المكعب كما هو الآن، مثل علبة أمامنا، هذا ليس الرسم الذي سيكون متاحاً لنا حين نحاول فتح حدود مكعب رباعي الأبعاد.

إذا أخذنا هذا الرسم للحدود، وحدّدنا كل الأوجه الستة، كيف يمكننا أداء مهمة بناء هذه الحدود غير المفتوحة؟ كيف عسانا ننجز ذلك؟

سبق وقلنا إنّ كل رقم يشكّل مربعاً خاصاً به. ونحن نعلم أنّ رقماً واحداً يلامس الآخر.

جيد.

لذا يمكننا استخدام هذه المعلومات لبناء أمر ما، أو- كأنّ وجهاً معيناً يتطابق معها. أولاً، لنبدأ بالرقم واحد. اتفقنا؟

سأكتب رقم ١. هذا مربع يُدعى الرقم ١. وهدفي هو أن أرسم الحدود المفتوحة لمكعب ثلاثي الأبعاد. لديّ ملاحظة بالمناسبة. لست أفكر حتى بالمكعب رباعي الأبعاد الآن. ليس هناك أي داعٍ لأستخدم خلايا دماغي للتفكير في مكعب رباعي الأبعاد. لأنّ ما أفعله الآن هو التركيز بالكامل على مسألة أبسط شأناً، لأنّني أتوقع التعلّم من تمرين أبسط كيفية حلّ تمرين أكثر تعقيداً. وهذه استراتيجية ناجحة حتماً.

هذه قوة استراتيجية التراجع إلى أمر أبسط، البحث في مسألة أساسية أكثر، من أجل تعلّم كيفية التعامل مع مسألة أكثر صعوبة وتعقيداً.

يمكنك المتابعة. ماذا الآن؟

نحن نعلم أنّ الأربعة يشكّل وجهاً آخر. وهو يلامس الواحد.

وهو يلامس الواحد. أنظر، هذا الرابع هنا. ومن ثم نفس—

قبل أن نتابع، دَعني أطرح عليك هذا السؤال. هذا أحد أجزاء الوجه رقم ٤. أين هو في هذه الصورة؟ هناك تقريباً؟

هذا صحيح تماماً.

إنّه خط عمودي هناك تقريباً. إنّه ربع الطريق إلى أسفل، وهو عمودي. لأنّه موازٍ لهذا الخط، لهذه القطعة. والآن هذا، أين ذلك الواحد؟

في منتصف الطريق.

في منتصف الطريق. وهذا؟

٤/٣.

٤/٣ الطريق. ومن ثم هذا؟

هو الجانب الآخر.

هل هذا موجود هنا. حسناً. جيد جداً. لدينا إذاً الرقم ٤، الوجه رقم ٤. ماذا الآن؟

إذا كان هذا الجانب الآخر-

لننتقل إلى الوجه الآخر.

طيّب.

لنتحدّث عن الأوجه الأخرى التي ترتبط بالرقم ١.

ستة.

الرقم ٦ هو في الأسفل. وأين هو على سبيل المثال هذا الخط السفلي هنا؟ أين سيكون؟

خط أفقي هناك.

بالضبط. ماذا عن هذا؟

الأمر نفسه، في منتصف الطريق.

في منتصف الطريق. وماذا عن هذا؟

٤/٣ الطريق.

وهذا هنا؟

في الأسفل.

الأسفل، صحيح. ها نحن. ما التالي؟ ثلاثة؟

ثلاثة.

جيد جداً. ماذا عن هذه الخطوط؟

ربع، نصف وثلاثة أرباع.

ستكون خطوطها على هذا الشكل. ما التالي الآن؟

الرقم خمسة.

الرقم خمسة. حسناً. والرقم خمسة، خمسة، خمسة، خمسة. مرة أخرى، ستكون الخطوط على هذا الشكل. مثلاً، هذا في ثلاثة أرباع الطريق. هذا الوجه هو هذا. لم يبقَ سوى واحد، الرقم ٢. أين عسانا نضعه؟

لا نستطيع لمس الرقم ١.

هذا صحيح.

ولكن بغض النظر عن هذا الأمر؟ أين قد يذهب؟

إلى أي مكان. أو ربما قد يذهب--

أعطِ جواباً محدداً.

هناك، هناك، هناك أو هناك.

صحيح، صحيح.

قد يذهب إلى أي من تلك الأماكن.

لنضعه هنا إذاً.

ومن ثم هناك الرقم ٢ هنا في الأسفل. وعلى فكرة، إذا تعمّقت في دراسة الأمر، سأرى أنّ الرقم ٢ يقلب فعلاً. لأنّ الرقم ٦ هو في الأسفل. وهنا، إنّه في الأعلى.

إذا كنت حذراً جداً بشأن الموضوع، كنت لأرسم الرقم ٢ خاصتي بهذا الشكل. رأساً على عقب. ولكن بصرف النظر، هذا الرقم ٢ هنا في الأسفل.

ما فعلناه الآن هو أنّنا تعلمنا. تعلّمنا كيف نأخذ هذا الرسم لحدود مكعب ثلاثي الأبعاد ومن ثم نفتحه. كيف يمكننا إذاً فتح حدود مكعب رباعي الأبعاد؟

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٥:	**المكعّب الزائدي**
الموضوع ٦:	**قوة التراجع إلى حالات أبسط**

نتّبع العملية ذاتها؟

العملية ذاتها. هذا صحيح تماماً.

بكلمات أخرى، لقد تراجعنا. لنطبّق الأمر على حالة أكثر تعقيداً- الحالة رباعية الأبعاد. ماذا نفعل أولاً؟

لنفترض أنّنا نريد فتح حدود هذا المكعب رباعي الأبعاد. يمكننا البدء مع المكعب رقم ١.

وما رأيك بشأن توقيت فعل ذلك؟

حين فتحنا مكعّبنا، بدأنا بالحدود رقم ١. كان مجرد مربع مسطح. ومن ثم--

ماذا سنفعل هنا إذاً؟

ابدأ بالمكعب رقم ١.

المكعب رقم ١- جيد جداً.

سوف أرسم مكعباً. وهذا المكعب رقم ١.

هذا هو، اتفقنا؟

حين فتحنا المكعب، بدأنا بالوجه ١ ونظرنا إلى الأوجه المتصلة به. ثم أسقطناها. لنقُل إنّ الوجه المتصل بهذا هو الوجه ٣ في الأعلى.

جيد جداً.

ممتاز. هذا الرقم ٣ هنا. ولدينا الرقم ٤ في الأسفل.

الرقم ٤ في الأسفل.

والرقم ٥ على الجانب الأيسر للرقم ١.

الرقم ٥ هو هنا- يبرز الرقم ٥ على الجانب الأيسر.

الرقم ٦ على اليمين.

الرقم ٦ على اليمين. ها نحن- الرقم ٦.

الرقم ٦. ثم الرقم ٧ في الخلف.

الرقم ٧ في الخلف- الرقم ٧ في الخلف هناك.

الرقم ٨ في الأمام.

يبرز الرقم ٨ من الوجه الأمامي.

جميل. انتهينا تقريباً.

الرقم ٨ هنا في الأمام، يبرز من الوجه الأمامي.

لدينا إذاً مكعب مؤلف من مكعبات ناتئة من كل الأوجه الستة. ماذا الآن؟

ومن ثم لدينا الرقم ٢--

الرقم ٢.

--الذي يلامس كل الأوجه، أو كلّ المكعبات الأخرى ما عدا الرقم ١. وأين يتلامس؟

نأخذ المكعب ٣، الوجه العلوي للمكعب ٢ هو وجه من المكعب ٣، لذا يمكننا لصقه في الأعلى.

جيد جداً. وفي أي مكان آخر كان يمكننا إلصاقه؟

لصقه. إلصاقه.

لصقه. كان بإمكاننا لصقه على الجانب ٦. كان بإمكاننا وضعه هنا-- يمكننا رسمه على حافة الرقم ٦. أو، أين أيضاً؟

الوجه الأمامي من الرقم ٨.

نلصقه هنا. لأنّ هذا الوجه من الرقم ٨ هو جزء من ذاك المكعب، الرقم ٨، اتفقنا؟

طيّب . ومن ثم جانب الرقم ٥. كان يمكننا وضعه هنا.

لدينا الرقم ٥ كوجه من المكعب ٢، أو الوجه الخلفي من المكعب ٧ أو الوجه السفلي للمكعب ٤.

حسناً. صحيح. كان أي مكان من تلك الأماكن الستة متاحاً لنا لنضع ذاك المكعب النهائي رقم ٢، ونربطه بما كان لدينا مسبقاً. وهذه صورة عن الحدود المفتوحة لمكعب زائدي.

على فكرة، تم استخدام هذه الصورة في المجال الفني عدة مرات. ثمة لوحة شهيرة بريشة سالفادور دالي تُدعى "كروسيفكسيكوس هايبركيوبوس". أو ربما "هايبركيوبوس كروسيفكسيكوس ". عليّ التأكد من المعلومة. ولكنّها أحد الاحتمالين على أي حال.

إنّها صورة الحدود المفتوحة لمشهد صليب مؤلف من مكعبات زائدية في ذلك العالم. إنّها لوحة فنية تحرّك المشاعر.

ما تعلّمناه اليوم، وهذا الاستكشاف للبُعد الرابع يجسّد بشكل رائع قوة التراجع-- التراجع إلى حالات أبسط لفهم الأمور المعقدة. وفي هذه الحالة، نسعى إلى فهم عالم تجريدي لم ننشئه قط من قبل.

كنا نسعى إلى فهم مجال البُعد الرابع- **البُعد الرابع الهندسي.** وأدركنا أنّه بغية فهم ذلك البُعد علينا التراجع دوماً إلى طريقة إنشاء البُعد الثالث، عبر البحث في أكوام من الأفضية ثنائية الأبعاد، وإدراك أنّه يمكن بناء مفهوم البُعد الرابع من خلال التفكير في أكوام من الأفضية ثلاثية الأبعاد.

وقد درسنا أجساماً في تلك الأفضية. درسنا طريقة فتح الحدود في تلك الأفضية. كما أتاح لنا التراجعُ إلى حالات أبسط أن نكتسب معلومات وفهماً للأمور المعقدة. هذا المغزى من قصة اليوم- ينبغي لنا فهم الأمور البسيطة بعمق من أجل التوصّل إلى فهم الأمور المعقدة والمجهولة. وليس فهمها فحسب، بل ابتكارها.

لقد ابتكرنا فعلاً مفاهيم البُعد الرابع هذه، وهذا أمر رائع ومسلٍّ. لذا فكلمة اليوم هي **التراجع**. ما يعني التراجع إلى أمر أبسط، وفهمه بعمق من أجل فهم الأمور المعقدة--

الأمور المعقدة في العالم.

أعكف على فهم الأمور البسيطة بعمق من أجل فهم الأمور المعقدة.

جيد. ما رأيك؟ البُعد الرابع. لا أعلم. يصعب فهمه.

نعم. ماذا تقصد بأنّه يصعب فهمه؟ لقد فهمتَه تواً.

في هذا المعنى التجريدي نعم. ولكنّ تصوّره في الواقع--

ولكن لا يُفترض بك أن تتصوّره. فهو مفهوم بالتناظر. تكمن الفكرة في أنّك من المفترض أن ترى صورة واحدة غير صحيحة. بدلاً من ذلك، يتعلق فهمك في الواقع بالتناظر. ليس من المفترض بك أن ترى الآن العالم رباعي الأبعاد في قطعة واحدة.

لا. ما عليك فعله هو فهم طرق التفكير هذه بالتناظر وعندها يمكنك فهم هذه الأمور بالتناظر.

صحيح، كنت أبحث--

الأسبوع الخامس:	**البُعد الرابع**
المحاضرة ٥:	**المكعّب الزائدي**
الموضوع ٧:	**الخاتمة - دُمت سالما**

أرجو أن تكون قد استمتعت باستكشافنا للبُعد الرابع. وقد توضَّحت لنا استراتيجية التراجع دوماً إلى المألوف، ومن ثم فهم المألوف بطريقة أعمق من أجل استكشاف **البُعد الرابع** الذي يكتنفه الغموض.

في القسم التالي، سوف نقوم بنزهة. سوف نبحث في لغز صغير حول المشي على الجسور في مدينة، كونيغسبرغ في بروسيا في القرن الثامن عشر، وسنرى كيف أدى هذا اللغز المتمحور حول المشي فوق الجسور إلى بروز فرع جديد بالكامل في عالم الرياضيات.

أعتقد أنك ستمضي وقتاً طيّباً.