نص محاضرات الأسبوع الثاني من مساق "التفكير الفعّال من خلال الرياضيات"

الأسبوع الثاني:	فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب
المحاضرة ١.٢:	الضرب والشبكات المستطيلة
الموضوع ١:	مدخل إلى الأسبوع الثاني

تذكّر أنّ المغزى من هذا المساق هو أن تتعلّم كيف تفكّر **بكفاءة**. وأنا أعتبر أنّ إحدى أكثر الاستراتيجيات الأساسية لفهم عالمنا بشكل أفضل ولابتكار أفكار جديدة ولاكتساب معارف جديدة، هو من خلال أخذ الأقسام الأساسية لما نفهمه والتركيز فعلاً على أن نفهمه بشكل أفضل. وعندما فكّرت بإعطاء مثل عن هذا المبدأ بمجال الرياضيات، أحد الأمور الأساسية التي فكّرت بها كان **الضرب**.

جداول الضرب، وأنا أعني اثنين ضرب اثنين، وثلاثة ضرب ثلاثة وخمسة ضرب سبعة، وكل هذه الأعداد -- ، أي أكثر الحقائق الأساسية عن الضرب التي يعرفها الجميع وحاول أن تقول لنفسك، ماذا يعني أن أفهمها بشكل أفضل وأن أفهمها بشكل أعمق؟ هل من مغزى وراء ذلك؟

تبيّن، باعتقادي، إنّنا سنرى اليوم أنّ حتّى الأفكار الأساسية للرياضيات، للحساب، تخفي الكثير من الأمور لنتعلّمها ونفهمها من خلال تحويل انتباهنا إلى فهمها **بعمق**. إذاً هيّا لنبدأ.

سينضمّ إلينا اليوم شخصان لمساعدتنا. أولاً، هذه **جولي**.
جولي، سلّمي على الجميع.
مرحباً جميعاً.
أهلاً بجولي.

وينضمّ إلينا **سكوت** أيضاً.
سكوت سلّم على الحضور.
مرحباً جميعاً.
أنت تضع قبّعة اليوم.
نعم.
أضع قبّعتي الجديدة والجميلة باسم فريق "لونجهورن".
جيد.
حسناً.
قبّعة جميلة باسم فريق "لونجهورن".
حسناً.
جيّد جداً.

إذاً ما سنفعله الآن هو أنّنا سنحاول أن نفهم **الضرب**. على فكرة، هل تعرف **جدول الضرب**، يا سكوت؟

نعم أعرفه.

تعرفه.

تستطيع أن تضرب –

أنا واثق جداً من هذا.

أنت واثق جداً من هذا.

نعم، فعلاً.

هذا رائع.

ماذا عن جولي؟

جولي، هل تعرفين **جدول الضرب**؟

نعم.

حسناً.

هذا رائع.

هذه بداية جيّدة.

جميل.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ١.٢:	**الضرب والشبكات المستطيلة**
الموضوع ٢:	**هندسة الضرب**

حسناً. إذاً أول طلب سأطلبه منك هو التفكير **بجداول الضرب**، وتحديداً تلك الأساسية.

لمَ لا نبدأ بضرب خمسة في خمسة.

خمسة في خمسة؟

خمسة في خمسة. هل تعرف الإجابة على خمسة في خمسة؟

٢٥.

٢٥. ممتاز، ممتاز.

٢٥.

هل توافقه الرأي.

نعم. ٢٥.

جيد.

إذا طلبت منك تمثيل معادلة الضرب هذه، هذه المعادلة السهلة جداً بصرياً، يمكنك أن تفعل ذلك بأخذ مربّع وتقسيمه إلى شبكة عرضها خمسة وطولها خمسة، أي مربّع.

٢٥.

وتتألّف تلك الشبكة من ٢٥ مربعاً.

حسناً.

في الواقع، هذه صورة للشبكة أمامك. شبكة طولها خمسة وعرضها خمسة.

الآن يا سكوت.

نعم.

سأطرح عليك سؤالاً. لنفترض أنّ هذه المربّعات الـ٢٥ هي قطع قابلة للتحريك، كالمربعات القابلة للتحريك، كيف تحرّك هذه المربّعات بطريقة فعالة لبناء مستطيل طوله أربع وحدات وعرضه ستّ وحدات.

بعبارات أخرى، تبدأ بالمربّعات الـ٢٥ هنا، وتريد أن تحوّلها إلى مستطيل طوله أربع وحدات، لكن عرضه ستّ وحدات. مفهوم؟

حسناً.

كم من المربّعات تحرّك بهدف بناء هذا المستطيل؟

الأسبوع الثاني:	فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب
المحاضرة ١.٢:	الضرب والشبكات المستطيلة
الموضوع ٣:	تحويل المربّعات إلى مستطيلات

الطالب ٢: بما أنّ العرض خمسة والطول خمسة --

الأستاذ: نعم.

الطالب ٢: ونحن بحاجة إلى تحويل وحدة منها إلى أربعة --

الأستاذ: نعم. بطول أربعة.

الطالب ٢: يجب أن يكون الطول أربعة، سآخذ الصف الأول المؤلّف من خمسة مربّعات.

الأستاذ: حسناً.

الطالب ٢: سآخذها للحظة.

الأستاذ: جميل. هذه بداية ممتازة. اسحبها للحظة. انقلها إلى الأعلى لتحصل على مستطيل أصغر. أصبح الطول أربعة والعرض خمسة.

الطالب ٢: العرض خمسة صح.

الأستاذ: حسناً. ثمّ ستقوم بتغييره.

الطالب: نعم. طيب سآخذ هذه هنا، أنا بحاجة إلى صف واحد بعد.

الأستاذ: ممتاز.

الطالب ٢: أو بالأحرى عمود واحد بعد.

الأستاذ: عمود واحد بعد صح. تريد أن يكون العرض ستّة.

الطالب ٢: نعم. إذاً سآخذ، بهدف التبسيط لا غير لديّ خمسة مربّعات قابلة للنقل. وأودّ أن آخذ مربّعاً وأنقله إلى نهاية كل صف.

الأستاذ: حسناً. ممتاز.

الطالب ٢: سأكرّر ذلك أربع مرّات.

الأستاذ: أربع مرات، أي أربعة مربّعات.

الأستاذ: حسناً.

الطالب ٢: بقي لدي مربّعاً واحداً.

الأستاذ: بقي لديك مربعاً. حسناً. جيد جداً، في الواقع هذا ممتاز. إذاً أخذت مربّعاً قياسه خمسة بخمسة وحوّلته إلى مستطيل أربعة في ستّة، وبقي مربّع واحد. جيد جداً. هذا مشوّق جداً.

الطالب ٢: نعم.

الأستاذ: أحسنت، أحسنت. الآن بما أنّ لديك مستطيلاً قياسه أربعة في ستّة، إلى أي حقيقة من حقائق الضرب يشير؟ إذاً يا سكوت إذا طلبت منك أن تكتب معادلة حول عدد المربّعات في مربّع قياسه خمسة في خمسة، وتقارنه بعدد المربّعات في مستطيل قياسه أربعة في ستّة، كيف تدوّن هذه المعادلة؟

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٢.٢:	**رؤية الأنماط**
الموضوع ١:	**مصدر الوحي للاستكشاف**

ما أحاول أن أشجّعك على فعله هو عند النظر في مسائل تعرفها جيداً، **كجداول الضرب**، هل تستطيع أن تلاحظ العلاقة بين الأجوبة التي تضيء على صلة الوصل بين حقائق الضرب؟

في الكثير من الأحيان، عندما يتعلّم المرء حقائق الضرب في الصف الثالث أو أي صف آخر، الثاني أو الثالث أو الرابع.
لا أذكر.
متى تعلّمتها أنت؟
لا أدري.
الصف الثاني. ربما الصف الثاني.

لا يهم متى تعلّمت هذه الحقائق، الواقع هو أنّك تتعلّمها بطريقة **ميكانيكية** نوعاً ما.

ربّما تعلّمت من خلال بطاقات العرض السريع أو بعض الطرق الأخرى لحفظ هذه الحقائق -- وأنك قد حفظت الحقائق عن **خمسة ضرب خمسة**، وتتذكّر الحقائق حول **أربعة ضرب ستّة**، وتتذكّر الحقائق حول **سبعة ضرب سبعة**، وتتذكّر الحقائق حول **ستّة ضرب ثمانية**. لكن ما أحاول قوله الآن هو هل تستطيع رؤية صلة وصل بين هذه الحقائق التي ربما لم تلحظها بالضرورة من قبل؟

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٢.٢:	**رؤية الأنماط**
الموضوع ٢:	**لا بدّ من وجود نمط هنا..**

الأستاذ: إذاً ما أحاول أن أسلّط الضوء عليه هنا هو أنه من خلال هذا التمرين البسيط، فجأة تصبح **جداول الضرب** أقل عشوائية.
ليس صدفة أن يكون ٤ ضرب ٦ يساوي ٢٤، أي أقل بواحد من ٥ ضرب ٥، صح؟
ليس صدفة أن يكون ٦ ضرب ٦ يساوي ٣٦، أي أكثر بواحد من ٥ ضرب ٧، صح؟
أو ٧ ضرب ٧، ٤٩.
ناقص ١؟
٦ ضرب ٦

ألا يبيّن لك ذلك بعض **الهيكلية** في هذه **الأعداد**. أي أنّها لا تُحفظ على حدة. بل ثمّة صلة وصل بينها. أليس ذلك رائعاً؟
الطالب ٢: نعم وهي -- لنقُل إنّ أمامنا فرصة لاستكشاف الكثير من الأنماط المختلفة.

الأستاذ: حسناً. في الواقع، دعني الآن أسألك أن تفعل شيئاً آخر، وهو التالي. كلما اكتسبت **معرفة** ما -- وهذا من أبسط وأهم وأقوى استراتيجيات الاستقصاء في العالم كلما أحرزت **تقدماً**، في أي مجال، اكتسبت معلومات لم تكن تعرفها قبلاً. عندها يحين الوقت للتفكير بتلك المعلومات ومحاولة الغوص فيها أكثر إن استطعت.

هذا هو **حبل الأفكار**. أي أنّ كل فكرة تؤدي إلى أخرى بالتالي، عندما تتبادر إلى ذهنك فكرة ما، حاول أن تستكشف ما يتبعها. في هذه الحالة، رأيت أنّك إذا أخذت الشبكة المربّعة، ذات حجم محدّد، وإذا أخذت الصف الأول وقلبته عمودياً، تستطيع أن ترسم مستطيلاً أقل عرضاً بمربّع واحد وأطول بمربّع واحد، ويبقى لديك مربّعاً واحداً صح؟

الآن دعني أطرح عليك بعض الأسئلة.

ما هي بعض الأسئلة ذات الصلة، المتعلقة بشكل وثيق بهذه المسألة، حاول ألا تستبق الأمور. بل حاول أن تقترب قدر المستطاع من هذه المسألة. حيث تستطيع أن تسأل نفسك، هل ينجح ذلك إن فعلت كذا وكذا.

ما هي الأسئلة ذات الصلة في هذا الصدد؟

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٢.٢:	**رؤية الأنماط**
الموضوع ٣:	**خطوات صغيرة**

الأستاذ: في الواقع، حسناً. إذاً سأسأل جولي.
سأسأل جولي، لقد أعرتك الكثير من الاهتمام هنا.

يا جولي، ماذا قد تفعلين – والآن نتحدّث عن المعرفة التي اكتسبتها، إذا أخذت مربّعاً، وفعلت شيئاً، تحصلين على شيء، أقصر بوحدة واحدة وأعرض بوحدة واحدة. أي سؤال يتبادر إلى ذهنك؟

الطالب ١: عوضاً عن جعله أقصر بوحدة واحدة وأعرض بوحدة واحدة، هل نستطيع أن نجعله أقصر بوحدتين وأعرض بوحدتين؟

الأستاذ: طيّب.

الطالب ١: ونراقب كيف يؤثّر هذا على الناحية الأخرى من المعادلة؟ مثلاً أتعرف عندما أخذنا مربّعاً وأضفناه إلى الجهة الجانبية وبقي لدينا مربّع إضافي؟
إذا أخذنا مربّعين وأضفنا مربّعين، هل سيتبقّى لنا مربّع واحد إضافي؟ أم سيتغيّر ذلك؟

الأستاذ: جيد.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٢.٢:	**رؤية الأنماط**
الموضوع ٤:	**محاولة حل صيغ مختلفة**

الأستاذ: لديك الآن جدول عرضه ٦ وطوله ٦. لمَ لا تنظر في هذا الجدول وتحاول القيام بما قالته جولي. قالت إنه بدلاً من تغيير المربّع، وتقليص طوله وعرضه بصفّ واحد، لنفترض أنّنا قلّصنا طوله وعرضه بصفّين. ماذا كنت لتفعل على المستوى الهندسي لإنجاز ذلك؟

الطالب ٢: حسناً، كنت لأقوم بالأمر نفسه الذي فعلناه في حالة تقليص صفّ واحد من الطول والعرض. كنت لأقلّص الطول الإجمالي للمربع بصفّين.

الأستاذ: حسناً.

الطالب ٢: ثمّ سأضيف صفّين أو عمودين، في نهاية المربع السابق.

الأستاذ: جيد.

الطالب ٢: أصبح لدينا الآن صفّان إضافيّان. أصبح لدينا ٤ صفوف إضافية.

الأستاذ: ما الذي حرّكته؟

الطالب ٢: بات لدينا مربّع طوله ٦ وعرضه ٦. وأخذت الصفّين العلويّين وصنعت عمودين باستخدام قطعتَي العمودين العلويّين. واكتشفت أنه بدلاً من وجود صفّ واحد ناقص، أو بالأحرى غير ناقص بل صف واحد زائد، بات لدينا الآن ٤ صفوف إضافية.

الأستاذ: وما هو الشكل الذي يتخّذه؟

الطالب ٢: إنه مربّع الشكل.

الأستاذ: إنه مربّع الشكل. حسناً، لنجرّب حالة أخرى. سأعطيك هنا نسخة أخرى عن هذا المربع الذي يتمتّع بطول ٩ صفوف وعرض ٩ صفوف.

حسناً.

الطالب ٢: قبل القيام بذلك، هل بإمكاني رسم معادلة صغيرة؟

الأستاذ: أجل.

الطالب ٢: لن أرسم، ولكن—

الأستاذ: أكتب معادلات لهذه الحالة. أجل، جيّد جداً.

أجل، من دون شك.

الطالب ٢: إذاً ٦ ضرب ٦، ناقص ٤، يساوي ٤ ضرب ٨.

الأستاذ: وعلى أيّ شكل تنطبق هذه المعادلة؟

الطالب ٢: المستطيل

الأستاذ: أعني أين الرقم ٤؟ ليس رقم ٤ هذا، بل ذاك.

الطالب ٢: أين رقم ٤ هذا؟

الأستاذ: أجل، قلت ناقص ٤.

الطالب ٢: إنها قطع إضافية.

الأستاذ: إضافية، وأين هي؟ أرني مكانها.

الطالب ٢: إنها--

الأستاذ: كلا، أعني في صورتك.

الطالب ٢: في صورتي. هنا.

الأستاذ: حسناً.

الطالب ٢: أجل. أظنّ أنها تتدلّى فقط.

الأستاذ: وما هو الشكل الذي تتّخذه؟

الطالب ٢: إنها مربعة الشكل.

الأستاذ: مربّعة؟

الطالب ٢: أجل.

الأستاذ: حسناً.

الطالب ٢: آه! إذاً سنستخدم مربعاً بطول ٢ وعرض ٢.

الأستاذ: طول ٢ وعرض ٢. إنني أحاول أن أقول لك إنه إذا كنت ترى شكلاً هندسياً، لا يجب أن نتجاهل ذلك. حسناً؟

حسناً، إذاً لنبدأ بهذا المربع. إليك جدولاً يتمتّع بطول ٩ وعرض ٩.

ماذا لو قلّصت طوله بصفّين وعرضه بصفّين؟

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٢.٢:	**رؤية الأنماط**
الموضوع ٥:	**إزالة ثلاثة صفوف**

هل تجول في ذهنك أفكار أخرى؟ لنجرّب ثلاثة صفوف.

لنجرّب ثلاثة صفوف.

حسناً.

نزيل ثلاثة صفوف.

نزيل ثلاثة صفوف.

نزيد ثلاثة أعمدة.

حسناً، جيّد.

بدأنا نشعر بالخوف الآن.

حسناً.

لم يعد لي مساحة.

المربّعات هنا، نعم.

سأنتقل إلى الصفحة البيضاء.

حسناً.

ابدأ بالرقم سبعة أيضاً، الذي يجلب الحظّ.

إذاً سنبدأ بالرقم سبعة.

حسناً.

أعتذر لأنّ مربّعاتي ليست -- إذاً سنزيل الصفوف الثلاثة الأولى.

حسناً.

ثمّ نوسّعها، بزيادة ثلاثة أعمدة أخرى.

حسناً.

إذاً اثنان، ثلاثة.

لنبسّط هذه المسألة، نقلنا ١٢ مربّعاً بالإجمال، كيف نفسّر ذلك بسهولة؟

سأفسّر هذه المسألة لاحقاً.

نقلنا ١٢ مربّعاً.

إذاً الآن لدينا -- بدأنا بمربّع قياس سبعة بسبعة. وأزلنا ثلاثة صفوف. إذاً صار المجموع أربعة صفوف. ثمّ أضفنا ثلاثة أعمدة عند الطرف.

إذاً لدينا ثلاثة أعمدة وأربعة صفوف، ما يساوي ١٢.

إنّني أستبق الأمور بعض الشيء. لدينا الرقم تسعة، أي مربّع ثلاثة

نعم.

الآن نقترب من الحل.

نعم.

إذاً مربّع سبعة ناقص مربّع ثلاثة يساوي؟

ما هذا؟
١٠ ضرب أربعة.
نعم.
إذا أخذنا سبعة وأضفنا ثلاثة إليها، نحصل على عشرة. وسبعة ناقص ثلاثة يساوي أربعة.
أربعة.
نعم.
إذاً-- يمكنك تدوين ذلك.
ماذا يساوي؟
يساوي ٤٠.
ماذا يساوي ذلك؟
يساوي ٤٠.

لكن ماذا يساوي من ناحية علم الهندسة.
من ناحية علم الهندسة. مربّع سبعة ناقص-- مربّع ثلاثة
نعم، مربّع سبعة ناقص مربّع ثلاثة.

مفهوم؟
مفهوم.

هل هذه الأرقام **صحيحة**، على فكرة؟
٤٩ ناقص ٩ يساوي ٤٠.
سبعة ناقص ثلاثة يساوي أربعة.
سبعة زائد ثلاثة يساوي ١٠.
١٠ ضرب ٤ يساوي ٤٠.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٣.٢:	**الجبر من خلال الحساب**
الموضوع ١:	**المزيد من المسائل التطبيقية..**

أيمكنني استخدام **المتغيرات**؟

لِمَ لا!

أعتقد أنّ..

جيّد هل أنتَ جاهز **للمتغيرات**؟

نعم!

أتظنّ أنّك فهمتَ المسألة بما يكفي لتتمكّن من حلّها بشكل عام؟ أفترض أنّك فهمتها.

قد يكون ذلك جيداً. ولكن قبل ذلك، لننظر في بعض الأعداد الأخرى في **جداول الضرب**، لأنّ جزءاً من هذا العمل يقضي بالقول إنّ جداول الضرب تتميّز بغنى مضاف في العلاقات لم ألحظه من قبل.

مفهوم؟

فها نحن الآن نطرح مربّع ٣ من مربّع ٧ لنحصل على ١٠ مضروب في ٤ أي ٤٠.

عظيم.

لنبدأ بعدد آخر،

لنفترض مثلاً مربّع ٨، موافق؟

طبعاً.

ممتاز.

مربّع ٨، ما رأيك؟

ما رأيك بمربّع ٨؟

ماذا لو كان علينا إزالة ثلاثة صفوف؟

لنقل ثلاثة صفوف.

أيجوز ذلك؟

٦٤ ناقص ٩ تساوي ٥٥. و٨ زائد ٣ تساوي ١١.

٨ ناقص ٣ تساوي ٥.

٥ مضروب في ١١ تساوي ٥٥.

فهمت.

واضح؟

صارت العلاقة واضحةً إذاً...

ماذا عن مثل آخر؟

على سبيل التسلية، سوف نأخذ مثلاً أو مثلين إضافيين.

ماذا عن ٦ مضروب في ٦؟

عندما تدوّن هذه المعادلة، تكتب أنّ ٦ ناقص ٣ تساوي ٦ ناقص ٣ مضروب في ٦ زائد ٣.

صحيح.

أرأيتَ ذلك في هذه الشبكة؟

أيمكنك رؤية علاقة الشبكة؟

جيّد.

حسناً.

وكيف يظهر كل جزء من هذا الحاصل في الشبكة؟

كيف يظهر في الشبكة؟

لنبدأ مع بـ٦ ناقص ٣ مضروب في ٦ زائد ٣

مفهوم.

٦ ناقص ٣، نزيل ثلاثة صفوف من الأعلى.

صحيح.

نحصل إذاً على ٦ ناقص ٣.

صحيح.

ثمّ تمدّ أعمدتك بـ٣، فنحصل على ٦ زائد ٣

مفهوم.

صحيح.

نعم.

جيد.

وماذا يبقى؟

من أين يأتي ناقص مربّع ٣؟

ناقص مربّع ٣؟

يأتي ناقص ٣ لأنّ لدينا مجموع ٩ مربّع أعداد متبقية تبقّى مربع ٩ أعداد لماذا ثمة مربّع متبقٍّ؟

هندسياً، لمَ تبقى مربّع؟

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٣.٢:	**الجبر من خلال الحساب**
الموضوع ٢:	**سكوت يشرح المربّع الإضافي**

لأنّ الصفوف التي تحذفونها تُذكّرنا، على فكرة، بما كان عليه هذا الشكل الهندسي بماذا بدأنا؟

بأيّ مربّع بدأنا؟

وكيف نقوم بتغييره؟

حسناً.

إنه إذاً مربّع بقياس ٩ في ٩.

نعم.

هنا.

ونحذف صفّين من الأعلى.

ولماذا اثنَين؟

هكذا إذاً ... لحظة حسناً هذا ما فعلناه. هذا ما قمنا به هنا. هذا ما فعلناه في هذه الحالة.

نعم، ما هو التغيّير الذي كنت تريد تنفيذه بحذف الصفّين؟

كنا نخلق مستطيلاً أعرض بصفَّين.

صحيح.

فلذلك، اخترتَ اثنين.

نعم.

حسناً.

وكان أعرض بصفين، إنما أيضاً أقصر بصفّين من هذه الأربعة الأخيرة، أو المربّع هذا بقياس ٢ في ٢. لا يوجد فعلاً أي مكان يقصده لذا، لماذا الكمية المتبقية هي تماماً عينها كالطول؟ لأن حسناً.

جوليا، كيف نقوم بذلك إذاً؟

طيب

عفواً.

لا، هيا تفضلي!

كنتُ سأقول، لأنّ، تكون لديك المربّعات الكاملة، بقياس ٩ في ٩، إذا حذفت صفّين من الأعلى، ثمّ نقلتَ الصفوف في الأسفل، تحصل على عمودَين إضافيّين. وفي الوقت عينه، أرجع قليلاً إلى الوراء. إذا كنا سنأخذ الصفّين الكاملين المضروبين في ٩ وفي الجهة المقابلة، نعم!

إنّه المستطيل كاملاً.

نعم، المستطيل الكامل.

إذا أخذناه وأدرناه أفقياً أو عمودياً، فإنّ الأعمدة الأربعة التي هي في الأعلى، لا تكون هي متبقية. فهي متبقية. ليست في المستطيل

صحيح. تبدو بارزةً فوق المستطيل.

صحيح. ستبدو هكذا بعض الشيء.

إذا نقلتَ كافة هذه الأجزاء إلى هنا، سوف تكون بارزةً. وسيكون عرضها شديداً لأنّ هذا ما حصلتَ عليه هنا. وذاك كان الجزء المدوّر. وسيكون هناك عمودان إضافيان في الطول لأنه يرتفع لغاية ٧ أعمدة فقط. وفي الأصل كان ٩.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٣.٢:	**الجبر من خلال الحساب**
الموضوع ٣:	**لمحات شاملة**

الأستاذ: إذاً، تقضي إحدى الاستراتيجيات الأساسية لنشر المعرفة برؤية نمط معين، ثمّ توسيعه. تعميمه.

فكّر في أكثر استنتاج عام يمكنك التوصّل إليه، يشمل كافة هذه اللمحات التي تملكها. هيا بنا نبدأ ونرى. جولي، أخبرينا بشكل عام قدر المستطاع، عما لاحظته.

الطالب ١: حسناً. بدأنا بمربّع بعرض وطول محددين، طبعاً. وسيكون الأمر عينه، بما أنّه مربّع.
الأستاذ: نعم.
الطالب ١: ونريد حذف عدد ما من الصفوف، وإضافة عدد الأعمدة عينه لنحصل على مستطيل.
الأستاذ: حسناً.
الطالب ١: وعندما قمنا بذلك، أخذنا العديد من الصفوف وأضفناها إلى الجانب الآخر لنحصل على عمود، أياً كان مربّع العدد، هو عدد المكعبات الإضافية التي كانت لدينا، عند تحويل ذلك المربّع الكبير إلى مستطيل.
الأستاذ: حسناً. هل كان لديك مربّعات إضافية؟
الطالب ١: نعم.
الأستاذ: نعم
هل يمكنك كتابة تركيبة تشمل ذلك؟

الأسبوع الثاني:	فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب
المحاضرة ٣.٢:	الجبر من خلال الحساب
الموضوع ٤:	تمثيل معادلة هندسياً

ماذا لديك هنا؟

اخترتُ متغيّرَين وa. وقلتُ إنّ **n** هي طول جانب المربّع الأصلي لديك.

حسناً.

و**a** هو عدد الصفوف التي تريد سحبها وإضافتها وتحويلها إلى أعمدة.

حسناً.

جيد.

وهكذا، قلتُ إنّ مربّع عدد **n** ناقص مربّع عدد **a** يساوي **n** ناقص **a** بين هلالَين، مضروباً في **n** زائد **a** بين هلالَين.

حسناً، يمكنك تصوير ذلك في هذا المربّع هنا، يمكنك تصوير ذلك مع تحديد ما يعنيه **n** وما يعنيه **a** وتصويره من خلال تحديده.

إذاً هذا هو ما نريده.

وهكذا بدأنا وكان لدينا **n** مضروب في **n**.

نعم.

ونريد أن نحذف a. فيصبح لدينا **n** ناقص **a**. ونريد إضافته هنا، فيصبح لدينا **n** زائد **a**.

ممتاز.

وهذا يُظهِر مربّعاً. سيكون بكل بساطة العدد الذي بقي لديك، لأنه كما قال سكوت.

ما الذي تنقله من الأعلى إلى هنا إذاً؟

تأخذ هذا الطول، أي **n** مضروب في **a** ناقص مربّع العدد **a** هذا.

لماذا لا تحدد بعض الأطوال؟

يكون ذلك **n** ناقص **a**.

جيد جداً.

وهذا مجرّد **a**.

A، حسناً.

وماذا عن هذا؟

هذا أيضاً **n** ناقص **a**.

وكل هذا الشيء هو **n** زائد **a**. هي أفضل مني بكثير في تفسير ذلك.

إنّها جيدة.

نعم.

طيب سكوت، أترى ماذا فعلَت هنا؟

نعم.

حسناً.

لنستكشف الآن!

أظنّ أنّه من الضروري الاحتفال بالنجاح.

وبالنسبة إليّ، تتمثل فكرة الاحتفال بهذا النجاح في النظر إلى الأعداد الحقيقية.
والنظر إلى جداول الضرب تلك، والاستمتاع بهذه العلاقات فعلاً التي ربما لم نفكر بها حقاً من قبل.
لنأخذ الآن قطعة ورق عادية، ويمكنك تصوّر الشبكة في ذهنك.

لندرس الآن بعض العلاقات. مثلاً، هلا ذكرتَ لي علاقةً بين، مثلاً، إجابةً لمربّع العدد ٨، ولنقل ٤ مضروب في ١٢.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٤.٢:	**استكشف عملية الضرب لوحدك**
الموضوع ١:	**حبكة جديدة في المسألة عينها**

اسمح لي بأن أسألك-- عظيم إذاً! أترى العلاقات؟ أليس ذلك رائعاً؟
نعم

أنّك ترى الآن العلاقات لم تعد **جداول الضرب** إذاً مجرّد أعداد **عشوائية**، ولكن ثمة سبب وراءها. ثمة علاقات بينها تجعلها، على فكرة أكثر تماسكاً، وإذا كانت وقائع كوقائع الضرب مرتبطةً ببعضها البعض، يصعب عندئذٍ نسيان أي منها لأنّ كل واحدة مرتبطة بالأخرى. صحيح؟

الآن سوف أطلب منك التفكير بها بالطريقة القديمة. سوف أعطيك عددَين فقط.

حسناً. سوف أعطيك عددَين فرديَّين. لِنَقُلْ ٥ و٩. موافِق؟
٥ و٩

أُربُط ذلك بمربّع كامل. أُربط ٥ مضروب في ٩ بمربّع كامل.
ضرب ٥
٥ مضروب في ٩
فهمت

أُربط ذلك بمربّع كامل.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٤.٢:	**استكشف عملية الضرب لوحدك**
الموضوع ٢:	**إجابة جولي**

الطالب ٢: انتهيت، تفضّلي جولي!

الأستاذ: حسناً، جولي. ٥ و٩.

الطالب ١: قلتُ إنه مرتبط بمربّع العدد ٧ ناقص مربّع العدد ٢

الأستاذ: وكيف اخترت ٧؟

الطالب ١: حسبتُ المتوسط الحسابي لـ ٥ و٩. وحصلتُ على ٧ كوسط بين العددين... والفرق هو ٢ في كلا الجانبَين. فيمكننا إذاً بكل بساطة استخدام هذه المعادلة وإدخال a وn وحل المسألة.

الأستاذ: وما هي النتيجة التي حصلت عليها؟

الطالب ١: النتيجة هي: ٥ تساوي ٧ ناقص ٢. و٩ تساوي ٧ زائد ٢.

الأستاذ: نعم.

الطالب ١: وهذا يعني أنّ ٧ هو n و٢ هو a، فمربّع العدد n هو إذاً مربّع العدد ٧، وa هو مربّع العدد ٢. و٤٩ ناقص ٤ تساوي ٤٥. و٥ مضروب في ٩ تساوي ٤٥.

الأستاذ: ٤٥ ممتاز.

الطالب ٢: فهمتُ.

الأستاذ: جيّد، لنحاول معادلةً أخرى، فقط للتسلية. سوف أعطيك عددين، لِنقُلْ ٤ و١٠.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٤.٢:	**استكشف عملية الضرب لوحدك**
الموضوع ٣:	**العلاقات تجعل الأمور أكثر وضوحاً**

ألا تظنّ أن الأمر جميل؟ أنظر الآن إلى رؤيتي. ألا تظنّ أنّ الأمر سيكون مسلياً كلما علّمتَ أحداً **جداول الضرب** أن ترى هذه العلاقة بالمربّعات والشبكات وثمّ فإنّ كافة هذه العلاقات تكون **ظاهرة**. ويمكن أن تشكّل جزءاً من ذاكرتك لهذه الأجوبة. لأنها جميعها متطابقة مع بعضها البعض.

حسناً.

نعم.

جيد!

رائع!

جيد!

نعم.

لنحاول مسألة أخرى.

واحدة فقط!

ماذا عن ٥ و٨؟

لا أقدر!

هيّا! ٥ و٨!

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٤.٢:	**استكشف عملية الضرب لوحدك**
الموضوع ٤:	**أين هي الآلة الحاسبة؟**

على فكرة، لماذا عارضت الآن! لأنك عندما تبحث عن **العدد المتوسط**، لا يكون الأمر سهلاً ليس عدداً **صحيحاً**!

ما هو؟

إنه ٧،٥ غير صحيح، ٦،٥

٦،٥ أعتقد أنه أكثر ميلاً **للوسط**.

نعم، 6,5 ماذا لديك إذاً؟

مربّع العدد ١،٥ يساوي ١،٢٥، أليس كذلك؟

كلا، 2,25

٢٧،٢٥ ناقص---أي ٢٥، ما يعني ٥---ماذا؟

ما الذي فعلته هنا الآن؟ ما الذي حصل للتو؟

لا ندري. لا ندري.

هذا ما حصل. أغفلتُ رقماً. لم يكن مسارنا صحيحاً.

نعم.

ليس ٢٧، ولكن ٣٧،٢٥ ناقص ٢،٢٥ يساوي ٣٥، أي ٧ مضروب في ٥، أو ٣٥.

الآن، لا أعرف ماذا فعلتَ هناك.

ظننتُ أننا نضرب ٥ في ٨. هذا ما حصلتُ عليه.

ما الذي حصل للتو؟

لا أدري ما حصل، ولكننا نحاول ضرب ٥ في ٨.

لا! ماذا فعلتْ؟

حسناً، أخبريني جولي إذاً ماذا فعلتِ؟

قلت لنا إذاً ٥ و٨.

تضيفهما معاً وتحصل على ١٣. وتقسم العدد على اثنين لإيجاد العدد **المتوسط**.

وهو ٦ و١/٢.

٦ و١/٢

٦ و١/٢ أسمعتَ ذلك؟

نعم

يصبح ٦،٥ n، ويكون a إذاً الفرق، أي ١،٥ إذاً مربّع العدد ٦،٥ ناقص مربّع العدد ١،٥ يساوي ٥ مضروب في ٨، لأنّ هل من احتمال لذلك؟

مربّع العدد ٦،٥، والأنصاف وما شابه أيمكنك تصوّر ذلك! شيء فظيع!

هل نجح الأمر؟ ما هو مربّع العدد ٦،٥؟

لا أدري، ولكن ينجح!

لم تفعل ذلك حتى!

٤٢٫٢٥

٤٢٫٢٥؟

نعم.

نعم، هذا صحيح!

هذا صحيح.

مربّع العدد ٦٫٥ هو ٤٢٫٢٥ ومربّع العدد ١٫٥ هو ٢٫٢٥ وعندما تخصم ٢٫٢٥ من ٤٢٫٢٥، تحصل على ٤٠ أي ٨ مضروب في ٥، وليس ٧ مضروب في ٥، لمعلوماتك! سوف أسألك الآن إذاً هل يذكرك ذلك بشيء؟

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٤.٢:	**استكشف عملية الضرب لوحدك**
الموضوع ١.٥:	**هل يمكننا استخدام أعداد صحيحة فقط؟**

هل تفكر بشيء إذاً؟
بالطبع لا!
بالطبع لا!
لا شيء في ذهني!
هل هذا صحيح؟
جولي، بمَ تفكرين؟

نحن نخصم مربّعين، وأنا أعتقد أن هذا ما يسمى بـ "**الفرق بين مربعين**" في الرياضيات.
موافق، ولكن هذا ما نحاول أن نفهمه. فماذا يحصل هنا إذاً؟ ما الفرق بين ما ننظر فيه الآن أقصد، لماذا أجبت بصدمة عندما سألتك عن ٥ و٨؟

ما هي العقدة الجديدة التي نشأت؟
إنه يمكنك استخدام أكثر من مجرد **رقم** عادي لا يجب بالضرورة أن يكون عدداً **صحيحاً**. بل يمكن أن يكون أيّ عدد. وليس من الضروري أي يكون من الأعداد **الفردية** أو **الزوجية** أو **المربّعات**.

حسناً. لنحاول الآن استكشاف قواعد **عامة** قدر المستطاع.
هيا بنا نرجع!
خذ ورقةً بيضاء. ارسمْ مربّعاً. والآن هيا بنا نستكشف السؤال!

ما هو السؤال الذي تريد استكشافه الآن؟

لنبدأ بمربّع، وللتسلية فقط، لنسمّيه **x** مضروب في **x** لأنّ **x** غالباً ما يُستخدَم **كمتغيّر**، مما يعني أنه قد يكون أي شيء.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٤.٢:	**استكشف عملية الضرب لوحدك**
الموضوع ٢.٥:	**استكشاف القاعدة العامة**

هيا إبدأ وقم بهذا الاستكشاف الذي سبق أن نفذّناه. ماذا كان؟

سحبنا عدداً من كنا نحوّل مربّعاً إلى مستطيل.

إلى مستطيل... كيف ارتبط بالمربّع الأصلي؟

كان عدداً محدداً، (غير مسموع) (علامة) عدداً محدداً

نعم و (غير مسموع)

حسناً.

جيد.

والمطلوب منك الآن أن تسأل نفسك من جديد وأنت تعيد هذا الاستكشاف الآن. هل علينا أن نسحب عدداً صحيحاً؟

هذا صحيح.

صحيح؟

هل يجوز أن يكون أيّ حجم أو يجب أن يكون عدداً **صحيحاً**؟

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٤.٢:	**استكشف عملية الضرب لوحدك**
الموضوع ٦:	**وصلنا إلى المعادلة العامة**

في البداية، أخذنا عدداً من الصفوف وحرّكناها وحوّلناها إلى أعمدة. سوف يحصل الأمر نفسه إذاً، سوف نسحب عدداً من الصفوف ونحوّلها إلى أعمدة. ومن ثمّ سوف نسحب **x** ناقص **y** منها. هل ستضع علامةً على ذلك؟

نعم!

y مضروب في **x** ناقص **y** تأتي هنا، أي **x y** ناقص **y**

حسناً.

وبما أنّ الطول الأصلي هو **x**، فأنت تسحب **x** ناقص**y**

صحيح.

يبقى **y** هنا.

صحيح. حدّدها.

عظيم!

والارتفاع الذي كنا أصلاً سوف نسحبه هو **y** بالتالي ما زال لديك y متبقية في الارتفاع. بقي لدينا إذاً مربّع **y** مضروب في **y** صحيح.

حسناً.

هل يجب أن يكون **x** و**y** أعداداً صحيحةً؟

كلا.

تنجح الهندسة حتى ولو كانت أعداداً نسبيةً. لا يهم كيف تكون الأعداد. لست متأكداً بشأن الأعداد النسبية ولكن قد تكون أيّ شيء، أيّ شيء لأن الهندسة تنجح، مهما كان حجم **y** أو **x**

لا تشير إلى أيّ من خصائصه.

ليس بالضرورة أن يكون عدداً صحيحاً.

الفكرة هي أنّ لديك الآن صيغة عامة وهي **x** ناقص **y** مضروب في **x** زائد **y** تساوي مربّع العدد **x** ناقص مربّع العدد **y** صحيح.

هذا هو إذاً الفرق الشهير بين صيغتي مربّعين.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٥.٢:	**لمحة عمّا أحرزناه من تقدّم**
الموضوع ١:	**لمحة عمّا أحرزناه من تقدّم**

ما رأيناه إذاً هو أنّ هذا الاستكشاف مشوّق حقاً، وقد بدأنا ببعض الملاحظات حول الأعداد، والأعداد المنتظمة، وحلّلنا أنّ الضرب من حيث الشبكة، لأنّها إحدى الاستعارات الأساسية للضرب، أو ظواهر الضرب إذا كانت لديك شبكة مع مربّعات، احتساب المربّعات في--إذا كانت لديك شبكة شديدة العرض وشديدة الطول، فإنّ حاصل الضرب لهذين العددين يظهر لك كم حجراً يوجد في ذلك المستطيل.

إذا بدأنا بمربّع، مع مجموعة أحجار، مربّع ومن ثم تلاعبنا به لتشكيل مستطيلات، ورأينا كم تبقّى منه، ومن ثمّ استكشفناه، وعمّمناه، نظرنا إلى كافة أنواع الأعداد والأمثلة وطوّرناها. وبعد فترة وجيزة، سنرى أنّنا طوّرنا معادلةً، معادلةً شهيرةً في الجبر.

يساوي الفرق بين مربّعين **x** زائد **y** مضروب في **x** ناقص **y** وهكذا يمكننا تحليل الفرق بين المربّعين.

يمكننا العودة إلى جداول الضرب فندرك أنّ فرق المربّعين هذا مهم فعلاً في ما يتعلق بالأعداد الحقيقية. فبالنسبة إليّ، كمدرّس رياضيات، ما يفاجئني دائماً هو أنّ الطلاب الذين يتعلّمون الرياضيات نادراً ما يفكّرون أنّنا حين نحصل على **x** هناك، لا يعود بإمكاننا التكلم عن أعداد حقيقية.

فهذا غير مرتبط بعض الشيء بالحياة الفعلية الحياة الفعلية للأعداد الحقيقية. وإحدى الأمور التي يبرزها ذلك هو أنه يجعل أشياءً كثيرةً أغنى، إحداها، جداول الضرب. فترى الآن علاقاتٍ لم تعهدها من قبل. العلاقات بين المربعات وغيرها من الحواصل. وهذا مُسلٍّ.

بعدها، رأينا كيف يمكننا تعميم فكرة ما. رأيتَ فكرةً، فقلتَ: أتساءل إذا كان صحيحاً حتى ولو لم تكن تلك الأعداد أعداداً صحيحةً. إذا لم تكن أعداداً صحيحةً والجواب هو نعم، يمكننا القيام بالنوع نفسه من التحليل الهندسي، ونرى أنها هي عينها.

وعلى فكرة، يمكننا الآن طبعاً النظر إلى ذلك من ناحية الجبر، والتأكد أنه صحيح من ناحية الجبر. وذلك ممتاز أيضاً! لأنّ تأمّل السؤال نفسه من أوجه نظر مختلفة طريقة ممتازة لجعله أغنى، لأنّ كل الأجزاء تتفاعل مع بعضها البعض.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٥.٢:	**لمحة عمّا أحرزناه من تقدّم**
الموضوع ٢:	**البروفيسور يتحدّث عن الأخطاء السخيفة**

يذكرني هذا بحين يرتكب الطلاب في امتحان رياضيات خطأً، ومن ثمّ يقولون "ما أغباني، ارتكبتُ خطأً سخيفاً". وأفكّر في نفسي يا له من خطأ سخيف!

لنفكّر إذاً في **جداول الضرب**. تعرف، يقول أحدهم: "يا إلهي!"
٦ مضروب في ٨ يساوي ٥٢.
كان مجرد خطأ سخيفا! خانتني ذاكرتي.

لو كنتَ لعبتَ فعلاً بجداول الضرب، وأدركت أنّ ٦ مضروباً في ٨ مثلاً يجب أن يكون أقل من ٧ مضروب في ٧، عندئذٍ فقط يمكنك أن تحزر أنّ ٦ مضروباً في ٨ يساوي ٥٢، وهذه ليست الحال إذا فكرتَ أن ٧ مضروباً في ٧ يساوي ٥٣، وهو أمر غير صحيح. إذاً هي تتطابق كلها معاً وعندما تتطابق الأمور معاً، تجعل الأمور-- إنها تجعل فهمك أعمق بكثير.

تنشأ شبكة فهم، ليرتبط كلّ شيء بأشياء أخرى، ويضيّق ذلك قاعدة معرفتك الكاملة. وما فعلناه هنا في استكشاف جداول الضرب العادية يعزز فهمنا لها عبر فهم **العلاقات** بين الأجوبة المختلفة. فهي إذاً ليست مجرّد أعداد مستقلة، بل هي مرتبطة ببعضها البعض. وعلى فكرة، هذه ليست سوى نقطة في بحر طرق استكشاف الحواصل والنظر إليها، إنها مجرد حقائق الضرب العادية. ومن بين الأمور التي يمكنك القيام بها بنفسك أن تقول، يا إلهي، هل يمكنني رؤية أنماط أخرى؟

ربما بالنظر إلى المستطيلات وتغيير مستطيل بإحدى الطرق، ورؤية ما إن كنت أستطيع العثور على أنماط أخرى؟ وبالطبع، يمكنك ذلك! وكل هذا يُغْني التجربة.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٥.٢:	**لمحة عمّا أحرزناه من تقدّم**
الموضوع ٣:	**تطبيق الإستراتيجيات**

المغزى من هذه القصة هو أن نعود إلى الأساسيات من وقت إلى آخر. أي أن نعود إلى الأفكار التي تعلّمتها منذ وقت طويل. في هذه الحالة، إننا نعود إلى الأفكار التي تعلّمناها جميعاً في الصف الثاني أو الثالث. وعندما ننظر في تلك الأفكار الأساسية، أي عند النظر فيها بوضوح، غالباً ما يمكننا رؤية علاقات وأنماط لم نلاحظها من قبل. وهي تُغني كلّ شيء وتجعله أكثر إثارة للأهمية. هذا مجرّد مثال عن استراتيجية بإمكانك اعتمادها في كلّ ما تقوم به في حياتك.

غالباً ما أفكّر في جوانب الحياة المهنية على سبيل المثال. إن فكّرت في بعض المفاهيم الأساسية التي تعتمدها في حياتك المهنية في كلّ ما تقوم به، في حال كنت تعمل في شركة، هل ستتمكّن من فهم بنيتها الأساسية؟ هل تعرف ما هو المنتج الذي تصنعه، هذا إذا كانت تصنع منتجاً؟ هل تعرف ما هي الخدمة التي توفّرها، هذا إذا كانت توفّر خدمة؟ هل بإمكانك فهم ذلك بتعمّق كبير؟

وإذا عدنا إلى ما هو أساسي، ربما عندما بدأت بالعمل، علماً أنك تعمل فيه منذ سنوات عديدة، لكن هل تمرّنت وفكّرت في الغاية الأساسية التي ترغب المؤسسة في تحقيقها؟

غالباً ما تخوّلك هذه الغاية فهم الفروق التي لم تفكّر فيها من قبل. كما أنني على فكرة أفكّر بهذا الموضوع بمفهوم شخصي يرتبط بالعلاقات. ماذا عن شخص تعرفه منذ سنوات عديدة؟ ماذا لو طرحت عليه أسئلة أساسية عن تاريخه الخاص؟

قد تكون تعرف شخصاً منذ ١٠ سنوات، لكنك قد لا تذكر أين نشأ، أو المجال الذي تخصّص فيه في الجامعة. أو قد لا تذكر أنّ لديه أشقاء، أو ماهية وظيفة أهله. أو معلومات عنه. وقد يكون من المثير للاهتمام أن تكتشف هذه الأمور. إذ يساعدك فهم الأمور الأساسية عن الأشخاص على توسيع آفاقك. وأظنّ أنه يجب اتّباع عادة رائعة، ألا وهي أن تنظر في أساسيات عالمك الخاص وطريقة فهمك الخاصة، وبذل جهود للتفكير فيها مراراً وتكراراً. لأنه في ل مرة تقوم بذلك، ستكتشف روابط وتفهم الأمور بشكل أفضل.

حسناً، كان من دواعي سروري أن أنظر في عمليات الضرب مثل فكرة عمليات الضرب الأساسية، على أمل أن أكتشف بعض الإيضاءات في العلاقات التي لم يتمّ التعرّف إليها من قبل. باتت لدينا الآن فرصة لاستخدام عمليات الضرب هذه كرسم توضيحي، أي كاستعارة لعادة تفكير بإمكانك اعتمادها في كلّ جانب من حياتك.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٦.٢:	**عناصر الأعداد**
الموضوع ١:	**مفهوم العناصر**

مرحباً, إنّه لمن دواعي سروري أن أكون هنا مجدداً. وأرحب بك في دورة أخرى من المساق حول **التفكير الفعال من خلال الرياضيات** وكما تعلم، يكمن الهدف من هذا المساق في مساعدتك على **التفكير** فعلياً بصورة أفضل. أقصد أنني أعتقد أنّه ومن خلال الممارسات الفعلية المقصودة، يمكنك أن تصبح أفضل في حل التحديات التي تواجهها في حياتك الخاصة، سواء أكانت تحديات مهنية أو تحديات شخصية، أو حتى تحديات متعلقة بالرياضيات. ولكن غالبية التحديات التي أتوقع أنك سوف تستخدم مهاراتك الجديدة لمواجهتها لا تتعلق بالرياضيات بأي شكل من الأشكال. ولكنّها تتعلق بالتفكير السليم وبالتالي ما سنقوم به اليوم هو شرح مثال عن كيفية تطوير طريقة تفكير أفضل على المستوى الشخصي.

أود أن أخبرك أنني حين أعطي الدروس بنفسي، هنا في جامعة تكساس، أحرص على أن تكون صفوفي تفاعليةً بطريقة مميزة جداً.

يقف الطلاب أمام اللوح الأسود ويشرحون العمل الذي قاموا به شخصياً لحل المسائل. فأنا أعطيهم مسائل مستعصية. وهم يعملون عليها لمدة أسبوع أو أسبوعَيْن ومن ثم يشرحون العمل الذي قاموا به على اللوح.

وبالنسبة إلي، فإنّ الطريقة الوحيدة التي تسمح لك بأن تتعلم التفكير بصورة أفضل هي التمرين الشخصي، والتدريب على التقنيات والسعي بجدّ لاستحداث الأفكار. وبالتالي ما سأحاول شرحه اليوم هي تقنية تعلم تسمح بالتفكير عميقاً في بعض الأفكار.

سنختار معاً فكرةً ما متعلقة بالرياضيات ونبيّن الطريقة التي تسمح لنا بفهم الأشياء بصورة أعمق.

دعني أقدّم لك الآن مثالاً عن استراتيجية تُستخدم في الكثير من الأحيان وهي فعالة للغاية. وتنطوي هذه الاستراتيجية على طرح مسائل معقدة وتقسيمها إلى أجزاء أبسط وأبسط، لأننا إذا قسمناها إلى أجزاء بسيطة وصغيرة يمكننا عندها أن نسميها عناصر أي أجزاء لا يمكن تقسيمها بعد ذلك نستطيع أن نفهم هذه الأجزاء الفردية، ونرى حينها كيف أنها تجتمع معاً لتكوّن هذا العالم المعقد الذي نحاول فهمه فعلاً.

فلنمضي قدماً ونفكر في مجال رياضي هام والذي نأمل بأن نفهم من خلاله المجال بصورة أفضل. وبالتالي ما سنقوم به اليوم فهو التحدث عن الأعداد الطبيعية. ولعلك تتذكر أنّ الأعداد الطبيعية هي الأعداد الأبسط وهي ١ و٢ و٣ و٤ و٥ و٦ ... إلى مالا نهاية (اللامنتهية) هذه هي **الأعداد الطبيعية**. وهي تحمل اسم الأعداد الطبيعية نظراً لأنّه يبدو من الطبيعي جداً عدّ الأشياء بواسطتها.

هناك عدد ١ من شيء ما، ٢، ٣، ٤ ولكن هذه الأعداد تشكّل مواضيع غنية ورائعة وسنحاول الآن فهمها بصورة أعمق مع التركيز على هذه الاستراتيجية التي تنطوي على تقسيمها إلى أجزاء أصغر واكتشاف ماهية عناصرها.

بصورة أساسية سنرى كيف يمكننا الحصول على عدد كبير من أعداد أصغر؟ وعندما نقوم بذلك، يمكننا أن نفكّر في هذه الأعداد الأصغر وندرك بأنها أكثر أهمية. وهي الأعداد التي تنشأ من خلالها الأعداد الأكثر تعقيداً. إنها المكونات الأساسية. أي أنّ ما سنفعله اليوم هو محاولة فهم المكونات الأساسية للأعداد الطبيعية.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٦.٢:	**عناصر الأعداد**
الموضوع ٢:	**إيجاد عناصر الأعداد**

وبالتالي لهذا الغرض، لدي شخص رائع هنا سيشارك في هذا الاستكشاف.

دعني أولاً أعرفك على كولمان. قُل مرحباً يا كولمان.

مرحباً

حسناً. هل تشعر يا كولمان بالحماس إزاء محاولة فهم الأعداد **الطبيعية** بصورة أفضل؟

أنا متحمس جداً

جيّد. بالمناسبة إنّ ما أحبه في هذا التمرين هو أنّ غالبية الأشخاص لا يطبقونه. إذ أنّ غالبية الأفراد عندما يفهمون الأعداد **الطبيعية**، فإنهم يفعلون ذلك منذ أن كانوا أطفالاً. ولكنّهم لم يفكروا يوماً في التوقف عند فهمها بصورة أعمق وفهم مصدرها الفعلي

طيّب.

وكيفية تركيبها من أعداد أصغر. وسأقوم الآن بطرح بعض الأسئلة على كولمان لأكتشف ما إذا كان يستطيع أن يفهم بنفسه الأعداد الطبيعية. أخبرني يا كولمان كيف يمكنك الحصول على عدد طبيعي أكبر من خلال أعداد أصغر؟ ما هي أبسط طريقة لاستخدام عددَيْن صغيرَيْن للحصول على عدد أكبر؟

يمكنك جمعهما

هذا ممتاز. يمكنك جمعهما. حسناً. لدينا الآن طريقة تمكّننا من تركيب قطع صغيرة للحصول على قطع أكبر. سأطرح عليك الآن السؤال التالي. هل يمكنك كتابة العدد ٦ على سبيل المثال كحاصل جمع لأعداد طبيعية أصغر؟

نعم.

جيّد. قدّم لي مثالاً على ذلك. قد يكون هناك طرق متعددة، ولكنني أريد طريقة واحدة فقط لكتابة العدد ٦ كحاصل لمجموع أعداد طبيعية أصغر.

٥ مضاف إليه واحد ١ يساوي ٦؟

هذا صحيح. هذا صحيح. وبالمناسبة لا يجب أن تقول ٥ مضاف إليه ١ على شكل سؤال. يجب أن تقول ٥ مضاف إليه ١ بشكل جازم فأنت واثق ومتأكد من كل ما تفعله.

٥ مضاف إليه ١

بالضبط

جيد جداً هذه إحدى الطرق لتقسيم الرقم ٦ إلى أعداد **طبيعية** أصغر. حسناً، ينطوي مفهوم العنصر في هذا البرنامج على طرح مسألة معقدة وتقسيمها إلى أجزاء، والعثور على الأجزاء التي لا يمكن تقسيمها بصورة إضافية. في حالة **العالم المادي** الذي نعيش فيه، تنطوي الطريقة التي ندرس من خلالها نحن العلماء هذا العالم المادي، هي تحديد الأشياء المادية وتقسيمها إلى أجزاء.

يمزقونها ويدرسونها أكثر ومن ثم يقسّمونها إلى أجزاء صغيرة ودقيقة. ويعثرون على الأشياء التي غالباً ما تُسمى أشياء على غرار **العناصر**، التي يتألف منها كل شيء محيط بنا من خلال جمع الأشياء معاً.

فالماء مصنوع من الهيدروجين والأكسجين وهو مركب بطريقة ما. وبالتالي يتمحور كامل البرنامج حول العثور على **العناصر**، ومن ثم اكتشاف طريقة جمعها معاً للوصول إلى هذا التعقيد المحيط بنا. هل هذا واضح؟
نعم.

حسناً. دعني الآن أطرح عليك سؤالاً عن الأعداد الطبيعية في ما يتعلق بالجمع. ما هو عنصر أو عناصر هذا البرنامج؟

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٦.٢:	**عناصر الأعداد**
الموضوع ٣:	**العدد ١ – العنصر الوحيد في الجمع**

الآحاد. هل هناك أي عناصر أخرى؟

الآحاد هي الأعداد الأبسط.

حسناً.

الآحاد والأصفار.

كلا، لا يعتبر الصفر عدداً طبيعياً. لا يعتبر الصفر عدداً طبيعياً. لا.

نبدأ بالعدد **واحد**.

نبدأ بالعدد **واحد**.

واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة.

يعتبر العدد واحد **عنصراً** إذاً لأننا لا نستطيع كتابة واحد كحاصل عددَيْن أصغر.

صحيح.

هل هذا صحيح؟

أخبرني الآن ما إذا كان هناك أي عدد طبيعي آخر لا يمكنك كتابته كحاصل أعداد طبيعية أصغر

لا.

لا. هذا صحيح.

لا يوجد.

حسناً. أي عدد آخر تختاره على سبيل المثال سبعة، يمكنك كتابته ثلاثة مضاف اليه أربعة. إنّ أي عدد طبيعي آخر هو حاصل أعداد أصغر منه باستثناء الرقم واحد.

حسناً هذا ما يجعل عناصر الأعداد مملةً جداً. أليست مملة جداً؟ فلا يوجد سوى عنصر واحد. ثمة عنصر واحد فقط.

ثمة عنصر واحد فقط. وهو عنصر **جوهري**.

ثمة عنصر واحد فقط في الأعداد ولكن هل تعرف ما هي وظيفته؟ إنه يجسد في الواقع السمة الأكثر أهميةً للأعداد الطبيعية والسمة المحددة لها بحيث أنه كلما وصلت إلى عدد طبيعي يكون هناك عدد أكبر منه.

كلما وصلت إلى عدد طبيعي يكون هناك عدد أكبر منه. هناك دوماً عدد أكبر. هناك دوماً عدد أكبر منه برقم واحد. وبالتالي فإن أي عدد طبيعي هو حصيلة واحد زائد واحد زائد واحد زائد واحد، واحد مضاف واحد مضاف واحد مضاف واحد وينطبق ذلك على كل عدد طبيعي.

ولعل هذا الأمر ممل نوعاً ما وغير واضح جداً لأنّ كل عدد طبيعي مماثل للآخر من هذا المنظور. أنه يكون حاصل **الآحاد**. وهذا ما يكشف لنا شيئاً جوهرياً وجيداً.

ولكن لربما هناك طرق أخرى لتركيب الأعداد الطبيعية من أعداد طبيعية أصغر. وبالتالي هل يمكنك التفكير في طريقة أخرى للحصول على أعداد طبيعية كبيرة من أعداد أصغر؟ يمكنك ضربها ببعضها البعض.

يمكنك ضربها ببعض البعض.
جيد جداً.

سأطرح عليك الآن السؤال عينه الذي طرحته في ما يتعلق بتحديد عناصر الأعداد الطبيعية على مستوى الجمع.

أريد منك أن تحدد لي عناصر الأعداد الطبيعية في ما يتعلق **بالضرب**. وبعبارة أخرى، أنا أسألك ما هي الأعداد الطبيعية غير القابلة للتجزئة بحيث لا يمكن تقسيمها إلى أعداد طبيعية أصغر؟

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٦.٢:	**عناصر الأعداد**
الموضوع ٤:	**الأعداد الأولية – عناصر الضرب**

الأعداد الأولية

حسناً. ما هي الأعداد الأولية؟

ليس لدى الأعداد الأولية سوى عاملَيْن ألا وهما العدد ١ والعدد نفسه

فهمت.

أعطني إذاً بعض الأمثلة عن الأعداد الأولية

العدد ١ هو عدد أولي إذ يمكننا ضرب ١ في ١ والعدد ٢ هو عدد أولي لأنّ ٢ ضرب ١ يساوي ٢

حسناً

والعدد ٣ هو عدد أولي أيضاً

حسناً.

ولكن العدد ٤ ليس عدداً أولياً لأنّ ٢ ضرب ٢ يساوي ٤ و٤ ضرب ١ يساوي ٤.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٧.٢:	**السمات الأساسية للأعداد الأولية**
الموضوع ١:	**هل نعتبر العدد ١ عدداً أولياً؟**

هل كنت تعرف كلمة **عدد أولي**؟

نعم.

حسناً وقد وصفت العدد الأولي من خلال القول أنّه عدد

كيف وصفته؟

لدى العدد الأولي **عاملان** فقط، العدد ١ والعدد الأولي عينه. ولا يمكن أن نقسمه على أي عدد طبيعي آخر

هل تعني أنّك لا تستطيع الحصول عليه من خلال أعداد طبيعية أصغر؟

هذا صحيح

حسناً

هو عدد **جوهري** إذاً نظراً لأنه لا يمكن تقسيمه إلى أعداد أصغر

لدي الآن سؤال عن العدد ١ هل أنت مستعد؟

قلت إنّ العدد ١ هو عدد **أولي**

نعم

حسناً

وقلتَ إنه عدد أولي نظراً لأننا لا نستطيع كتابته كحاصل لأعداد أصغر

صحيح

ولا يمكن كتابته إلا كحاصل ١ ضرب ١ أي العدد عينه

١ و١ نعم

أنت تعتقد إذاً أنّ العدد ١ هو عدد **أولي**

من المعروف أن التحديدات تنتج عن القرارات التي يتخذها الإنسان نحن مَن نحدد ما إذا كان أحد الأعداد عدداً أولياً أم لا بطريقة أو بأخرى وثمة سبب لذلك فالسبب الذي دفعنا لاختيار توظيف مفهوم العناصر في ما يتعلق بالضرب هو أننا أردنا فهم كيف أنّ **الأعداد الطبيعية** مركبة من أجزاء لا يمكن تقسيمها. هل هذا الصحيح؟

أريد أن أطرح عليك سؤالاً بشأن العدد ١ وما إذا كان يجب علينا اعتباره عدداً **أولياً** أم لا.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٧.٢:	**السمات الأساسية للأعداد الأولية**
الموضوع ٢:	**العوامل الأولية للعدد ٦**

حسناً

لنفترض أنني أطلب منك تحديد العوامل الأولية للعدد ٦ مما يتألف العدد ٦

من كافة العوامل أو **العوامل الأولية**؟

حسناً، لنقل **عوامل أولية**

عوامل أولية؟

نعم

١، ٢، ٣

عوامل أولية

نعم

للعدد ٦

هذا صحيح

بعبارة أخرى، كيف يمكنك تقسيم العدد ٦ إلى أعداد يمكن ضربها معاً للحصول على العدد ٦ من دون أن تكون قادراً على تقسيم هذه الأعداد بصورة إضافية؟

إنّ العوامل الأولية للعدد ٦ هي ٢، ٣، و١

٢، ٣، ١

نعم, حسناً

أنتَ تقول إذاً أنّه ثمة ثلاثة **عوامل أولية**

نعم

حسناً

لنفترض الآن أننا كتبنا هذا العدد على شكل التالي: ٢ ضرب ٣ ضرب ١ ضرب ١

صحيح

هذا صحيح أيضاً

كم هو عدد العوامل الأولية

إن حصيلة هذه المعادلة ٦ أيضاً

هل أصبح لدينا **أربعة** عوامل أولية إذاً؟

نعم

ثمة عدد غير متناهٍ من العوامل الأولية فأنت تستطيع دوماً ضرب أي عدد بالعدد ١ للحصول على العدد عينه وبعبارة أخرى سألتك ما هي العوامل الأولية للعدد ٦ واخترت ٢، ٣، و١ ولو سألت شخصاً آخر سيقول لي ٢، ٣، ١ و١ وقد يضيف شخص ثالث رقم ١ إضافي ويقول آخر ٢، ٣، ١ أو يقول أحدهم ١و ١و ١و ١و ١و وقد يقول شخص مختلف ٢ و٣ فقط ٢ ضرب ٣

لنناقش الآن السبب الذي يدفع برنامجنا إلى الاستفسار عن السمات الأساسية لشيء ما؟

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٧.٢:	**السمات الأساسية للأعداد الأولية**
الموضوع ٣:	**تفرّد التحليل إلى عوامل أولية**

ستكون سعيدا إنْ سألتك ما هي **العوامل الأولية** لعدد محدد وسألت جين ما هي العوامل الأولية لهذا العدد سأرغب طبعاً في الحصول على الإجابة عينها أليس كذلك؟

نعم طبعاً

ولكن هذا خطأ صح؟

أعني أنني لا أستطيع ذلك بسبب **الآحاد**

بسبب الآحاد

صحيح

وقد تختار أنت استخدام العدد ١ لمرة واحدة بينما قد تختار جين استخدام العدد ١ خمس مرات وهكذا دواليك. هذه مشكلة، هل هذا صحيح؟

لأنّ هذا الأمر يعني أنّ التحليل إلى عوامل أولية ليس متفرداً على الإطلاق فقد تستخدم العدد ١ مرة واحدة ويستخدم شخص آخر تحليلاً مختلفاً **للعوامل الأولية** أعتقد أنّ في هذا الأمر شائبة ما فما نريده فعلاً هو التحقق مما تتألف منه بالضبط هذه **الأعداد الطبيعية** وسيكون من الرائع لو كان هناك طريقة واحدة لتركيبها.

نعم

نعم أنت ترى أنّ هذا ما نريده من **الأعداد الأولية**

نريد أن تكون المكونات **الأساسية** المكونات الأساسية **الجوهرية** بحيث إذا بنيت أنت شيئاً ما وبنت جين شيئاً ما سنحصل على أغراض مؤلفة من العناصر عينها هل هذا صحيح؟

نعم

ما الذي سنفعله إذاً بالنسبة إلى الرقم واحد؟

لن نسميه **عدداً أولياً**

هذا صحيح لن نسميه عدداً أولياً

في الواقع، لا يعتبر العدد واحد إذاً عدداً أولياً بسبب هذه المسألة بالضبط إذا تخلصنا من العدد واحد، وسألتك ما هي العوامل الأولية للعدد ستة ستكون الإجابة اثنَيْن وثلاثة فقط

اثنان وثلاثة فقط

ولو سألت أي شخص كان سأحصل على الإجابة عينها نظراً لأنّه ثمة طريقة واحدة فقط لكتابة أي عدد طبيعي بدءاً من العدد اثنَيْن والأعداد الأكبر وكتابتها كحاصل لأعداد أولية محددة. وقد يكون هذا العدد ذاته عدداً أولياً أو قد يكون حاصل أعداد أولية أخرى، وهذه طريقة فريدة

هذا هو الدافع إذاً وراء عدم السماح للعدد واحد بأن يكون عدداً أولياً أما السبب الذي دفعني إلى التحدث عن ذلك فهو أنّ هذا الأمر يعطينا مثالاً واضحاً عن كيفية قيام الإنسان بخيارات محددة لدى اتخاذ القرارات ينظر العديد من الأفراد إلى **الرياضيات** على أنّها علم بديهي نزل من السماء وظهر منذ الأزل وسيبقى في هذا العالم إلى الأبد. فهذه هي الطريقة التي يتم من خلالها التعريف عنه في المدرسة، أليس كذلك؟

وأنت تعتقد أنّه لا علاقة للإنسان بأي شكل من الأشكال في ابتكار هذا العلم ولكن في الواقع ثمة أمور يبتكرها الإنسان ولسبب ما، وفي هذه الحالة ينطوي السبب على أن يكون وصف كل عدد **طبيعي** متفرداً عن الآخر
هل أنتَ موافق؟
نعم

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٨.٢:	**ما هو عدد الأعداد الأولية؟**
الموضوع ١:	**ما هو عدد الأعداد الأولية؟**

أريد منك أن تحدد لي عدد **الأعداد الأولية**. ما هو عدد الأعداد الأولية برأيك؟ كما تعلم، **العناصر**، هناك الكثير منها، مئة ونيّف ما هو عدد الأعداد الأولية؟

يجب أن يكون هناك عدد لا متناهٍ من الأعداد الأولية. يجب أن يكون هناك؟

نظراً لأنّه هناك عدد لا متناهٍ من الأعداد الطبيعية

فهمت.

حسناً ولكن هناك مشكلة في ذلك وهي هذا الأمر أريد منك أن تقوم بما يلي كتمرين هل يمكنك تركيب أعداد كبيرة عشوائياً من خلال العددَيْن الأولَين اثنين وثلاثة فقط؟

نعم.

حقاً، وكيف ستفعل ذلك؟

أستمر بضربهما في بعضهما البعض

نعم

وهكذا تستطيع الحصول على أعداد أكبر من مليون وأكبر من مليار ومن أي عدد كبير آخر، صحيح؟

حسناً

أنت قلق بعض الشيء بشأن البرهان الذي قدمته إذ قلت إنّه يجب أن يكون هناك عدد لا متناهٍ من الأعداد الأولية لأنه يوجد الكثير من الأعداد الطبيعية اللامتناهية ولكن يمكن حتى لعددَيْن أولَين أن ينتجا عدداً لا متناه من الأعداد ولكن كيف عساك تتأكد من أنّ هذه الأعداد الأولية التي ذكرتها مسبقاً، كيف عساك تتأكد من أنّك إذا دمجتها بصورة صحيحة لن تحصل على **عدد طبيعي** محدد؟ وبالتالي ينطوي أحد الأسئلة الذي نرغب دوماً في طرحه لدى البحث في العثور على عناصر بنية محددة على الاستفسار عن ماهية هذه العناصر وعن عددها.

هذا سؤال أساسي. وهذا ما سنناقشه الآن.

ما هو عدد الأعداد الأولية؟ ما هو عدد الأعداد التي لا يمكن تقسيمها إلى أجزاء أصغر؟

سألتك مسبقاً وسأسأل الجميع عما إذا كان باستطاعتهم الحصول على أعداد كبيرة بصورة عشوائية كالأعداد الأكبر من مليون فقط من خلال أعداد أولية فحسب؟

نعم

اثنان، ثلاثة، خمسة، وما إلى هنالك

كيف تقوم بذلك؟ أكتب لي مثالاً واحداً هنا. كيف تقوم بذلك؟

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٨.٢:	**ما هو عدد الأعداد الأولية؟**
الموضوع ٢:	**رفع الأعداد الأولية للقوى**

ليس هناك من قيود مفروضة على عدد المرات التي يُستخدم فيها كلّ عنصر. فكّر أنّه في الكيمياء حتى وفي الرمز الكيميائي للمياه ثمة جزيئان من الهيدروجين وجزيء واحد من المياه وبالتالي يمكنك استخدام العنصر نفسه مرات ومرات متعددة لتركيب أي شيء تركبه وإذا استخدمت العدد اثنَيْن خمس مرات هل تعرف كيف تكتب ذلك؟

يمكنك رفعه لقوة جبرية

هذا صحيح

هذا ما أقصده بالمناسبة يمكنك كتابة ذلك فرفع العدد اثنين لقوة العدد خمسة يساوي اثنَيْن ضرب اثنَيْن ضرب اثنَيْن ضرب اثنَيْن ضرب اثنَيْن

نعم خمس مرات

هذا صحيح تماماً وهذه مجرد مطابقة للرموز الرياضية تقول لك إنك تستطيع استخدام العدد نفسه مرات متعددة ومتعددة وبالتالي يمكنك الحصول على أعداد كبيرة باستخدام البعض من هذه الأعداد الأولية بل في الواقع عدد واحد ويمكنك استخدام العدد اثنَيْن أكثر من مرة ولكن السؤال يطرح نفسه مجدداً حقاً؟

هل هناك عدد لا متناهٍ من الأعداد الأولية أو لا؟

ما رأيك الآن؟

لم يعد السبب الذي قدمته مسبقاً منطقياً، أهذا صحيح؟ فأنت قلت مسبقاً إنّه يوجد عدد لا متناهٍ من الأعداد الطبيعية وقلتَ بالتالي إنّه نظراً لذلك يجب أن يكون هناك عدد لا متناهٍ من **الأعداد الأولية**.

نعم

لا أعلم ما الذي تعنيه كلمة "**يجب**" هل هذا يعني أنّه في العالم الذي أرغب العيش فيه يجب أن يكون هذا العالم على هذه الحالة؟ من أي منطلق تستخدم كلمة "**يجب**"؟

لا أعتقد أنّ قاموس علم الرياضيات يضمّ كلمة "**يجب**" فهو يرتكز على كلمتَيْ "**يكون**" أو "**لا يكون**"

أعتقد أنّه من خلال ضرب الأعداد الأولية فقط فإنّك تفوُّت بعض الأعداد لا محالة

نعم، فهمت

جيّد.

هل توافقني الرأي؟

نعم

حسناً

طيّب، دعنا نرى إذا كان ذلك صحيحاً هل أنتَ موافق؟

دعنا نرى إذا كان باستطاعتنا استنتاج ذلك

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٨.٢:	**ما هو عدد الأعداد الأولية؟**
الموضوع ٣:	**هل العدد قابل للقسمة على ٢؟**

إنّ إحدى الاستراتيجيات وإحدى أقوى الاستراتيجيات التي أوصي بها بالفعل كل شخص مهما كان الشيء الذي يحاول تعلمه أو يحاول فهمه أو تكوين فكرة عنه هي القيام بالأشياء الأبسط أولاً ومن ثم تعلمها وفهمها بشكل أعمق بكثير مما ظننته يوماً.

وعندما تقوم بذلك، سترى أنّ هذا الأمر يفتح الأبواب أمام قدرتك على القيام بأمور أكثر تعقيداً. فلنجرب هذه الاستراتيجية.

سأطرح عليك سؤالاً سيكون بسيطاً إلى حد السخافة بحيث أنّك لن تصدّق حتى أنني قد أكون ساذجاً إلى هذا الحدّ لأطرح سؤالاً مماثلاً. هل أنتَ موافق؟

إليك السؤال

هل يمكنك أن تحدد لي عدداً طبيعياً__ لحظة، اسمح لي بأنّ أستهل ذلك بالقول إننا إذا كنا نبحث عن أعداد أولية، والعدد الأولي هو عدد لا يمكن أن نقسمه على الأعداد الأصغر منه بالتساوي

صحيح

هل أنتَ موافق؟

هذا هو العدد الأولي لا يتألف العدد الأولي من أي عدد أصغر منه يقسمه بالنصف ويمكن بالتالي أن نقسمه عليه بالتساوي نحن نبحث إذاً عن أعداد لا يمكن قسمتها على أعداد أخرى بالتساوي سأسألك عن أبسط مسألة ممكنة في ما يتعلق بهذا الموضوع.

هل يمكنك تحديد عدد لا يمكن قسمته على العدد اثنين بالتساوي؟ هل يمكنك تحديد عدد طبيعي لا يمكن قسمته على العدد اثنين بالتساوي؟

هذا سهل جداً إلى حد السخافة.

خذ بعض الوقت للتفكير في عدد واحد وقد لا تحتاج حتى إلى الوقت. وقد تخطر على بالك الكثير من الأعداد

فكر في الأمر لمدة ثانية واحدة

فكر فيه يا كولمان لثانية واحدة.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٨.٢:	**ما هو عدد الأعداد الأولية؟**
الموضوع ٤:	**هل العدد قابل للقسمة على ٢ أو ٣**

حسناً، أهلاً بك من جديد.

حدّد لي يا كولمان بعض الأعداد التي لا يمكن قسمتها بالتساوي على العدد ٢..

٣

لا يمكن قسمتها بالتساوي على العدد ٢

٥، ٧، ٩، ١١ وبقية الأعداد الفردية

حسناً، جيد جداً

وإذا تمكنت من قسمة عدد فردي على العدد ٢، ما سيكون باقي القسمة عندها؟

١/٢.

كلا باقي القسمة أنا لا أقصد الحاصل الذي تتوصل إليه بعد قسمة العدد

باقي القسمة، هل تعلم ما هو باقي القسمة؟

يبقى هناك دوماً العدد ١. يبقى هناك العدد واحد يبقى هناك العدد واحد إلى جانب الحاصل الذي يتم التوصل إليه

صحيح

والعدد ١ هذا هو باقي القسمة

نعم، فهمت.

تضرب العدد ٢ في عدد طبيعي آخر، وبعدها تسأل نفسك ما الذي بقي؟ وسيكون العدد ١

على سبيل المثال، العدد ٧ هو اثنان ضرب ثلاثة زائد واحد زائد واحد، زائد واحد

جيد جداً

أو العدد ١١؟

هو العدد ٢ ضرب ٥ زائد ١

زائد واحد

جيد جداً

هكذا، يكون لديك باقي قسمة وهو العدد ١ دوماً

دوماً

حسناً دعني أطرح عليك الآن سؤالاً هل كان هذا الأمر سهلاً جداً؟ لا

نعم، كان سهلاً جداً

كان سهلاً للغاية.

والآن، سأطرح سؤالاً آخر

تفضّل.

لأن هدفنا هنا هو العثور على الأعداد التي يمكن قسمتها على مجموعة من الأعداد هل أنت موافق؟

نعم

جيد

هل يمكنك أن تحدد لي عدداً لا يمكن قسمته بالتساوي على العدد ٢ ولا يمكن قسمته أيضاً بالتساوي على العدد ٣؟

لا على العدد ٢ ولا حتى على العدد ٣

سأفكر في ذلك

تذكر أنّ هدفنا لا يكمن في العثور على عدد واحد فحسب، بل العثور على نظام أو طريقة نستطيع من خلالهما تحديد ما إذا كان عدد محدد غير قابل للقسمة على العددَيْن ٢ أو ٣ بالتساوي.

فكّر في ذلك.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٨.٢:	**ما هو عدد الأعداد الأولية؟**
الموضوع ٥:	**باقي القسمة ١**

حسناً, جيد جداً

جيد جداً لنرى ما الذي فعلته؟ ما هو المثال الأول الذي قدّمته، وكيف حصلت عليه؟

مثالي الأول هو العدد سبعة

ولماذا فكّرت في العدد سبعة؟ هو حاصل اثنَيْن ضرب ثلاثة زائد واحد

صح. ولماذا... وكيف علمتَ أولاً أنّ هذا المثال هو مثال جيد عن العدد الذي لا يمكن قسمته بالتساوي على اثنَيْن أو حتى على ثلاثة؟

لأنه عدد أولي

ممتاز، هذا صحيح أيضاً ولكن من خلال الطريقة التي قمت بتركيبه على أساسها، هل هناك ما يقوله لك من خلال طريقة كتابته أي اثنان ضرب ثلاثة زائد واحد أنّه غير قابل بالطبع للقسمة بالتساوي على العددَيْن اثنَيْن أو ثلاثة؟

يشمل العدد واحد المضاف باقي القسمة

نعم هو باقي القسمة. إنه باقي القسمة.

العدد واحد هو باقي القسمة

هل تقصد عندما نقسم العدد سبعة على اثنَيْن؟

عندما نقسمه على اثنين وعندما نقسمه على ثلاثة.

هذا صحيح, فالعدد ثلاثة يقسم حاصل اثنين ضرب ثلاثة بالتساوي والعدد اثنين يقسم حاصل اثنَين ضرب ثلاثة بالتساوي. رائع، رائع

أنت تقصد إذاً أنّه سيكون هناك لمعادلة اثنين ضرب ثلاثة زائد واحد باقي قسمة يساوي واحد إذا قسمت الحاصل على اثنين وباقي قسمة يساوي واحد إذا قسمت الحاصل على ثلاثة

هذا صحيح

طيّب

ما هو السؤال التالي الذي سأطرحه عليك؟

لِم لا تطرح على نفسك السؤال التالي؟

لا تنسَ أنّ هدفنا هو العثور على أعداد أولية نحن حاول أن نثبت في الواقع أنه هناك عدد لا متناهٍ من الأعداد الأولية.

هذا ما نهدف فعلاً إلى إثباته هذا يعني أننا نحاول إثبات وجود أعداد أولية أكبر وأكبر أعداد لا يمكن قسمتها بالتساوي على أعداد أصغر

حسناً

ونحن نحاول تطوير استراتيجية للحصول على مثل هذه الأعداد سؤالي لك الآن هو عن السؤال التالي الذي سأطرحه ما هو السؤال التالي الذي يجب طرحه في معرض الحصول على أعداد طبيعية لا يمكن قسمتها بالتساوي على أعداد أصغر؟

هيا بنا، إطرح سؤالاً.

الأسبوع الثاني:	فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب
المحاضرة ٨.٢:	ما هو عدد الأعداد الأولية؟
الموضوع ٦:	المزيد من الأمثلة عن باقي القسمة ١

ما هو السؤال الذي تقترحه يا كولمان؟

كيف نحصل على أعداد تعطينا باقي قسمة ١ كلما قسمناها.

حسناً، أعطني الآن سؤالاً محدداً جداً كالسؤال الذي طرحته عليك في ما يتعلق بتحديد عدد لا يمكن قسمته بالتساوي على العدَدَيْن ٢ أو ٣. أو لعله كان يجدر بي قول عدد يعطينا باقي قسمة ١ عندما نقسمه على العدد ٢ وباقي قسمة ١ عندما نقسمه على العدد ٣.

ما هو السؤال التالي برأيك؟

ما هو العدد الذي يكون لديه باقي قسمة ١ عندما يُقسم على أي عدد أولي؟

حسناً أنتَ تحاول استباق الأمور، مهلاً لحظة يا كولمان. أنت تحاول الإجابة على السؤال الكبير الكامل. عندما تقول أي عدد أولي وما إلى مالا نهاية

لا أنا أتحدث ببساطة تامة وبواقعية كبرى لقد طرحت عليك سؤالاً يقضي بتحديد عدد تحصل على باقي قسمة ١ عندما تقسمه على العدد ٢ وتحصل على باقي قسمة ١ عندما تقسمه على العدد ٣

أريد أن يكون السؤال التالي سؤالاً عادياً جداً مكملاً للسؤال الذي طرحته.

لا تحاول تعميمه.

أريد أعداداً حقيقيةً لا أريد التحدث عن كافة الأعداد الأولية وما هو مشابه لها

أعطني سؤالاً محدداً جداً

ماذا عن ضرب ٢ في ٣ في ٥؟

حسناً

ما هو السؤال بالضبط؟ ما نوع العدد الذي تحاول توقعه؟

أنا أستفسر عن العدد الذي يعطينا باقي قسمة ١ عندما نقسمه على ٢ و٣ و٥

ممتاز، ممتاز

جيّد.

وكيف يمكنك أن تنتج عدداً، يعطيك حين تقسمه على ٢ باقي قسمة ١ وعندما تقسمه على ٣ يعطيك باقي قسمة ١ وعندما تقسمه على ٥ يعطيك باقي قسمة ١

يمكنك ضرب ٢ في ٣ في ٥ وإضافة واحد على هذا الحاصل لتكون النتيجة ٣١

.٣١

رائع، هذا عدد أنتجته أنت.

لِم لم تطرح السؤال التالي: ما هو العدد الذي يعطينا باقي قسمة ١ عندما نقسمه على ٢ أو ٣ أو ٥؟ لِمَ تخطيت العدد ٤؟

٤ لأنّه حاصل ٢ ضرب ٢.

وسيتمحور السؤال حول العدد الذي يعطينا باقي قسمة ١ عندما نقسمه على ٢ و٢ و٢ و٣

فهمت

ألم تكن تريد القيام بذلك؟

لِم لا؟
أعتقد أنّ الأمر مثير للاهتمام على نحو مماثل.
حسناً.
ولكن كان باستطاعتك القيام بذلك. كان باستطاعتك أن تقول ما هو العدد الذي يعطيك باقي قسمة ١ عندما تقسمه على ٢ أو ٣ أو ٤. هل يمكنك أن تحدد لي هذا العدد بالمناسبة؟
٢ و٣ و٤.
٦ ضرب ٤ يساوي ٢٤. مضاف إليه ١ يساوي ٢٥
٢٥ صحيح
الطريقة الأفضل إذاً للتفكير في ذلك هي ٢ ضرب ٣ ضرب ٤ مضاف إليه واحد
نعم
فهي تبيّن الاساس الذي استندت إليه في ذلك أو الاستراتيجية التي اتبعتها عندما تجمع الأعداد معاً، لن تستفيد من ذلك فلن ترى ما هو مصدرها
حسناً، دعني أطرح عليك الآن هذا السؤال لنرى ما إذا كان بإمكانك استدلال أي نمط هنا
أولاً، هل ترى أي نمط هنا؟
كلا
طيّب، دعني أطرح عليك سؤالاً آخر هل يمكنك أن تحدد لي عدداً، تحصل عليه عندما تقسمه على ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ أو ٧ أو ١٠ وحتى العدد ١٠٠٠ مهما كان العدد الذي تقسمه عليه من بين هذه الأعداد باقي قسمة ١؟
مع كلّ رقم جديد نحصل على باقي قسمة واحد باقي قسمة ١ أنا اقصد أنّني أريد منك تحديد عدد يعطينا إذا قسمناه على ٢

باقي قسمة ١ وإذا قسمناه على ٣ يعطينا باقي قسمة ١ وإذا قسمناه على ٤ يعطينا باقي قسمة ١ وإذا قسمناه على ٥ يعطينا باقي قسمة ١ وعلى ٦ أو ٧ أو ٨ وحتى الأعداد ٩٩٧، ٩٩٨، ٩٩٩ و١٠٠٠ أي عندما تقسمه على أي من هذه الأعداد تحصل دوماً على باقي قسمة يساوي العدد واحد

هل يمكنك أن تحدد لي عدداً بهذه الخاصية؟ هذا هو التحدي الذي ستقوم به هل يمكنك التفكير في عدد طبيعي تحصل عندما تقسمه على أي عدد طبيعي من ٢ حتى ١٠٠٠ على غرار ٥٧ أقصد عندما تقسمه على ٥٧ تحصل على باقي قسمة يساوي ١ كيف تصف هذا العدد؟

الأسبوع الثاني:	فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب
المحاضرة ٨.٢:	ما هو عدد الأعداد الأولية؟
الموضوع ٧:	نمط مع باقي قسمة يساوي ١

الأستاذ: لِم لا تخبرني بما يجول في بالك وأنتَ تفكّر؟

أنظر، لا يكمن الهدف الكلي من هذا التمرين في أن تتعلم نوعاً ما كيفية إثبات وجود عدد لامتناهٍ من الأعداد الأولية؟ فالهدف الحقيقي منه هو التدرب على كيفية التفكير.

وتنطوي إحدى استراتيجيات التفكير على القيام بكلّ خطوة بخطوتها في ما تقوم به وهذا ما نريد التحدث عنه ما الذي نجح؟ وما الذي لم ينجح؟

هيا قُل لي إذاً ما الذي تفكّر فيه الآن؟

الطالب: أفكّر في أنه وبالنسبة إلى هذا العدد الذي نحاول وصفه ثمة حاصل زائد واحد، أي حاصل وباقي قسمة، حاصل زائد ١. وينطوي الحاصل على مجموع كافة الأعداد المركبة

الأستاذ: ما الذي تقصده بمركبة

الطالب: أقصد كافة الأعداد الطبيعية.

كافة الأعداد الطبيعية؟

الطالب: نعم

الأستاذ: ما الذي تقصد بكافة الأعداد الطبيعية؟

الطالب: ٢ ضرب ٣ ضرب ٤ ضرب ٥ حتى ١٠٠٠

الأستاذ: آه

حسناً جيد جداً

جيد جداً هيّا، دوّن ذلك الآن أعرف أنك لا تستطيع تدوينها كلّها باشر بالأمر فقط

٢ ضرب ٣ ضرب ٤ ضرب ٥ ومن ثم نستخدم نقطة، نقطة، نقطة ومن ثم ضرب ٩٩٨ وضرب ٩٩٩

نعم

حسناً

الطالب: طيّب.

الأستاذ: ضرب ١٠٠٠

الطالب: ضرب ١٠٠٠

الأستاذ: ماذا بعد ذلك؟

الطالب: زائد ١

الأستاذ: زائد ١

حسناً

الطالب: زائد ١

الأستاذ: هذا العدد-- قبل كل شيء هو عدد أتوافقني الرأي؟

الطالب: نعم هو كذلك إنه عدد.

الأستاذ: صحيح هو عدد طبيعي لأنّ كل ما تقوم به هو ضرب الأعداد الطبيعية في بعضها البعض ومن ثم إضافة ١. أخبرني الآن لِمَ لا يُقسم هذا العدد على العدد ٥ بالتساوي؟

الطالب: لأننا إذا قسمنا هذا العدد على العدد ٥ سنحصل أيضاً على باقي قسمة يساوي ١

الأستاذ: لماذا؟

نعم هذا صحيح لماذا؟

لأنّ العدد ٥ هو عامل يُضرب بحاصل كافة العوامل الأخرى

الأستاذ: صحيح

الطالب: يمكنك بسهولة إزالته من المعادلة فعلى سبيل المثال ٥ إنه ٢ ضرب ٣ ضرب ٤ ضرب ٥ ضرب ٦ وما إلى هنالك أو إنه ٥ ضرب حاصل ٢ و٣ و٤ و٥ و٦ أو من دون ٥

نعم

٥ ضرب حاصل ٢ و٣ و٤ و٦ و٧ و٨ وصولاً إلى العدد ١٠٠٠

الأستاذ: بالضبط

الطالب: يمكنك تجاوز أي من العوامل السابقة وستحصل دوماً على باقي قسمة يساوي ١

الأستاذ: جيد جداً ممتاز

الطالب: شكراً لك

الأستاذ: حسناً دعني أطرح عليك هذا السؤال يجب على الجميع التفكير في هذه المرحلة على أساس هدفنا فهدفنا هو تحديد عدد الأعداد الأولية ما هو عدد **الأعداد الأولية**؟ أنا أريد منك التفكير في الأمر فحسب، قد يكون هناك عدد لا نهائي منها

السؤال الذي يطرح نفسه هنا هو: هل يمكن استخدام هذه التقنية لتفهم ذلك بوضوح بحيث يمكنك القول إنَّ ثمة عدد لا نهائي من الأعداد الأولية دعني أسألك أولاً قبل أن تفكّر في ذلك بعض الشيء بصورة إضافية دعني أسألك ما هو البديل عن القول إنّ هناك عدداً لانهائي من الأعداد الأولية؟

إذا لم يكن ذلك صحيحاً، ما هو الصحيح؟

الطالب: ثمة عدد نهائي من الأعداد الأولية

الأستاذ: مجموعة منتهية

الطالب: نعم مجموعة منتهية، نعم

الأستاذ: صحيح

الطالب: مجموعة منتهية من الأعداد الأولية

الأستاذ: هذا صحيح لن يكون هناك سوى عدد منتهي من هذه الأعداد الأولية.

الطالب: تبدأ المجموعة بالعدد ٢ وتستمر حتى العدد الأخير

الأستاذ: صحيح بالضبط

الطالب: نعم

الأستاذ: بالضبط عندما تكون البدائل حاضرةً في ذهنك وتكون واضحاً جداً، إما يكون هناك عدد لانهائي من الأعداد الأولية أو أن هذه الأعداد تبدأ من العدد ٢ مروراً بـ ٣ و٥ و٧ وحتى العدد الأكبر وينتهي الأمر هنا

الطالب: نعم

الأستاذ: هذه هي البدائل إما تتوقف عند نقطة معينة أو تستمر إلى ما لا نهاية

نعم

سؤالي لك الآن هو: هل هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية أو بدلاً من ذلك هل ثمة فقط أعداد منتهية من الأعداد الأولية؟

يجب على الجميع الآن التفكير بذلك باستخدام هذه التقنية لأنّ كولمان ابتكر طريقةً لإنتاج الأعداد لم يكن من الضروري أن تضربها كلّها في بعضها البعض لإثبات وجهة نظرك وفي الواقع، كان من الأفضل ألا تضربها في بعضها البعض

الطالب: نعم كان من الأفضل عدم القيام بذلك

الأستاذ: أفضل بكثير لو أنّك لم تضربها في بعضها البعض لكنتَ رأيت أنّ العدد مضاف إليه ١ حصلت على عدد لا يمكن قسمته بالتساوي على ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ وصولاً إلى العدد ١٠٠٠

السؤال الذي يطرح نفسه الآن هل يمكنك استخدام هذه الطريقة الاستدلالية لكي تثبت أنّه لا بد في الواقع من وجود عدد لانهائي من الأعداد الأولية؟

ليفكر الجميع في ذلك.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٨.٢:	**ما هو عدد الأعداد الأولية؟**
الموضوع ٨:	**قُل لي ما الذي تقصده**

حسناً، فلنمضِ قدماً ونناقش هذه المسألة. أخبرني يا كولمان ما الذي تحاول إثباته؟

أحاول أن أثبت أنّ هذه الصيغة أو هذا الشكل المستخدم لإنتاج أعداد كبيرة سيعطينا دوماً عدداً أولياً مع باقي قسمة يساوي واحد وذلك في ما يتعلق بأي حاصل نحدّده، وأنه يمكننا الحصول على هذه النتيجة إلى ما لا نهاية.

حسناً

ما قلته كان غامضاً بعض الشيء في الواقع ولم يعبّر تماماً عما قصدته بالتالي، السؤال هنا هو، هل أنّ السبب في عدم صياغتك لجملتك بصورة واضحة يعود إلى عدم فهمك جيداً لما كنت تتحدث عنه أو عدم التكلم بدقة ويقين؟ أي أنّ هناك سببين أساسيين وبالمناسبة أنا أقول لك ذلك بصراحة لأنّ إحدى القيم التي يمكنك اكتسابها من هذه التجربة هي تعلم الطريقة التي يمكنك من خلالها أن تكون أكثر دقةً.

وإذا اعتدتَ على أن تقول ما الذي قصدته بالضبط عوضاً عن التحدث بطريقة غامضة نوعاً ما عنه، ستنجح باكتساب أداة قوية لا مثيل لها. لأنّك حينها ستسيطر على الأمور وإذا لم تكن على بيّنة من أمر ما، لا بأس بذلك يمكنك أن تقول ذلك.

يمكنك أن تقول، حسناً لا أعلم ولكن إليك ما الذي أعرفه وعندها ستكون قد استندت إلى أساس صلب جداً ألا وهو الوضوح عوضاً عن اللجوء إلى الغموض الملتبس.

الأسبوع الثاني:	فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب
المحاضرة ٨.٢:	ما هو عدد الأعداد الأولية؟
الموضوع ٩:	وضّح ما فهمته

بالمناسبة، وأنت تفكر، أريد أن أقول شيئاً عن هذا الأمر.

عندما يكون كولمان مهتماً بالتفكير جدياً بمسألة معينة تكون قدرته على الاستدلال وفطنته كبيرتَيْن ويمضي الوقت بهدوء ويستمر جاهداً في تصميمه على الفهم ولا يكون متأكداً بنسبة ١٠٠٪ مما يفهمه ولكنّه يكون على بينة من كامل أجزاء المسألة وأعتقد أنّ هذه اللحظة مهمة جداً للشخص للتفكير بمفرده لأنّ هذا الوقت ملائم جداً حتى يوضّح الفكرة لنفسه.

وستتوضح الصورة أمامه جيداً ولن يزعزعها أي شيء ولن ينساها إلى الأبد لأنها ستكون شديدة الوضوح بالنسبة إليه. ولكن إذا أتيت أنا وشرحت له المفهوم وأومأ لي برأسه ليعلمني بأنّه فهمه سينساه في اليوم التالي بخلاف ما سيحدث إذا سعى بجد لاستيعاب المفهوم بنفسه وتحقق بمفرده من كافة الفروق الدقيقة والطفيفة التي يجب عليه السعي جاهداً لفهمها على سبيل المثال أتذكر كيف قال في وقت سابق إنّ حاصل هذه الأعداد مضاف إليها واحد يعطينا عدداً أولياً؟

لم تكن طريقته صحيحة ومن خلال العمل بجد على فهم هذه المسألة والتحقق بوضوح مما يعرفه عن هذه الأنواع من الأعداد اكتسب فطنةً ستسمح له بأن يثبت أنّه ثمة في الواقع عدد لا نهائي من الأعداد الأولية. ولا يمكن أن يكون هناك عدد نهائي من الأعداد الأولية وحسب. فالمسألة تتعلق إذاً بجمع كافة الأجزاء معاً وهذا ما اريد من الجميع القيام به أيضاً وعلى نحو منتظم في كلّ ما تفعله فإذا تحمّلت عناء التفكير بعمق بيني وبين نفسي هل سأفهم بالفعل كلّ تفصيل أم سأقع في الغموض بعض الشيء؟

وإذا اعتدت على أن تفهم هذه الأشياء جيداً وتوضحها بشكل كبير ستسهل الأمور على نفسك. وستشهد تغيراً ملحوظاً في الطريقة التي تتصرف فيها لبقية حياتك. وهذه عادة يمكنك تطويرها مع الوقت وأحياناً قد يقول البعض إنّه ثمة أشخاص آخرون يعرفون هذه الأمور فينتظرون حتى يشرحوها لهم.

وإذا ما اعتمدت هذه الفلسفة، يمكنك شخصياً أن تقوم بالأمر بنفسك وتفهمه بالكامل عندها ستتقدّم بأشواط كبيرة على الأشخاص الآخرين وستتجاوز قدراتك الحدود التي لم تتخيل يوماً أنك ستتجاوزها.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٢. ٩:	**الدليل على أن الأعداد الأولية لا متناهية وردود فعل الطلاب**
الموضوع ١:	**الأعداد الأولية لا متناهية – إثبات ناجح!**

لنَعُد إلى المسألة قيد البحث

أولا، هل تظن الآن أنّك فهمت ذلك؟ نعم أم لا؟

قد تكون مشكلتي عدم التعبير عن ذلك بشكل صحيح ولكنني أظن أنني فهمت الأمر

حسناً لنبدأ

ما الذي ستشرحه لنا؟

يمكننا دوماً ضرب أكبر عدد يمكن تخيله في كافة الأعداد الطبيعية المتتالية الأصغر منه

جيد، جيد.

ويمكن إضافة العدد ١ إلى الحاصل وستكون عوامل العدد على الدوام أكبر من أكبر عدد يمكن تخيله

هذا صحيح.

لِم لا يمكن إذاً أن يكون هناك عدد نهائي من الأعداد الأولية؟

هذا صحيح تماماً

لنفترض أنّه ثمة عدد نهائي من الأعداد الأولية مع عدد أولي أكبر دونته من أجلك لتطلع عليه كيف يمكنك أن تبيّن لي أنّ هذا العدد ليس أكبر عدد أولي وأنني كنت على خطأ

يمكنني أن أضيف ١ إلى هذا العدد الأولي و -- أو يمكنني دائماً ضرب هذا العدد الأولي، أو العدد الأولي الأخير كما حددته أنت

يمكنني ضرب هذا العدد الأولي الأخير بكافة الأعداد الطبيعية المتتالية التي تكون أصغر من العدد الأولي الأخير وإضافة ١ إلى الحاصل

نعم

وستكون العوامل الأولية للعدد الجديد أكبر دوماً من العدد الأولي الذي حُدّد في السابق على أنّه العدد الأولي الأخير

هل تقصد بعض العوامل الأولية أو كافة العوامل الأولية؟

لا أعرف ما إذا كان بعض هذه العوامل أو كلها ولكن بعضها.

بلى أنت تعلم لحظة، فكّر بالأمر.

كافة العوامل الأولية

لماذا؟ لِم لا يمكن قسمة هذا العدد على العدد ٣ بالتساوي؟

لأن العدد الأولي السابق حُلل إلى العامل ٣ وترك باقي قسمة يساوي ١

هذا صحيح

لِم لا يكون العدد ٥٩؟

لأن العدد ٥٩ ترك باقي قسمة يساوي ١ أيضاً

هذا صحيح.

وقُسِم إلى عدد أولي جديد.

صحيح

سأسألك الآن مجدداً في هذا العدد الذي حصلت عليه والذي نتج عن كافة الأعداد أي ٢ ضرب ٣ ضرب ٤ ضرب ٥ وحتى الوصول إلى أكبر عدد أولي وهو أكبر عدد أولي مفترض لا بدّ لنا من أنّ نقول أكبر عدد أولي مفترض لأنك تحاول أن تثبت الآن إمكانية وجوده. وتضيف العدد ١ والآن تسأل، ما هي العوامل الأولية لهذا العدد؟

هي جميعها أكبر من أكبر عدد أولي مفترض

نعم

الجواب هو نعم ولكنه أكبر عدد أولي

صحيح

صحيح

هل يمكن أن يكون هناك عدد أولي أكبر إذاً؟

لا, لا, لا, لا

إذاً جيد جداً

نعم

جيد جداً

أثبت الآن أنّه ثمة عدد لانهائي من الأعداد الأولية

جيد؟

جيد جداً

جيد جداً

حسناً

ممتاز.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٢. ٩:	**الدليل على أن الأعداد الأولية لا متناهية وردود فعل الطلاب**
الموضوع ٢:	**التفكير في نجاحك**

سأطرح عليك شيئاً الآن من باب المرح وبالمناسبة سأطلب منك بعد فترة وجيزة تقديم برهان على المسألة من جديد ويعود السبب في ذلك إلى أنّه في غالبية الأحيان وعندما يتعرف الأفراد على شيء ما يتعلمونه لوقت قصير يستمتعون به حتى ويثنون عليه ولا يعودون إليه مجدداً أو يتذكرونه أو يستمتعون به.
وأنا أرى أنّ أحد الأشياء القيّمة جداً هو العودة إليه والتحقق منه مجدداً.

وعندما يترسخ في ذهنك وتراه مجدداً قد ترى حتى شيئاً جديداً فيه لم تفكر فيه من قبل. وقد تكون قادراً على إثبات المزيد من الأمور. وقد يكون هناك المزيد من الأشياء التي يجب رؤيتها ثمة دوماً المزيد من الأشياء ثمة دوماً المزيد من الأشياء وتكمن الفكرة في العودة مجدداً إليه والتفكير به من جديد وهذا ما سنقوم به بعد قليل. ولكن قبل أن نقوم بذلك أريد أن اطلب منك وصف العملية أي عملية الاستكشاف التي أوصلتك إلى هذا النجاح وبالمناسبة هذا نجاح فعلي أقصد إثبات وجود عدد لا نهائي من **الأعداد الأولية** وهذا مثال عن إحدى النظريات التي تعتبر من بين أهم النظريات في علم **الرياضيات**. وتمكنّت من استكشافها

السؤال الذي يطرح نفسه الآن، ما هو نوع الاستراتيجيات التي تبدو لك ناجحةً؟ وما هي الاستراتيجيات التي لم تفِ بالغرض؟
وبعد ذلك سأتحدث عن الأمر بنفسي لأخبرك عن وجهة نظري إزاء الاستراتيجيات التي تسير في الاتجاه الصحيح والاستراتيجيات التي لا تسير في هذا الاتجاه. هل أنتَ موافق؟
تفضل

أرى أن الأمر كان مفيداً عندما بدأنا بدراسة الأعداد الأولية الصغيرة وماهي عواملها أو الأعداد الأولية الصغيرة والحواصل التي نحصل عليها عندما نضربها في بعضها البعض عندئذٍ بدأنا بالمضي قدماً أقصد عندما تعاملنا مع السؤال على المستوى الجزئي أي المستوى الأصغر ٢ ضرب ٣ ضرب ٤ هذه هي اللحظة الحاسمة لأنّ العوامل ...
هذا غير صحيح ليس هذا ما أردت قوله فدراسة المسألة من المستوى الأصغر سهّل علي رؤية القواعد التي يمكننا تطبيقها لاحقاً على الأعداد الأكبر حتى عندما تكون الأعداد كبيرة جداً بحيث لا يمكن كتابتها بعد ذلك لكن القواعد تبقى نفسها
أوافق على هذا بالمناسبة
لقد نجح كولمان عندما ركّز على التفاصيل.

نعم, ٢ ضرب ٣ ضرب ٤ مضاف إليه ١ لدى النظر في **الأعداد الفعلية** وسأتحدث عن المرات التي كنت فيها أقل نجاحاً حيث بدأت تتحدث فوراً عن كافة الأعداد الأولية والعدد الأولي الأكبر وفي الواقع على ورقتك لاحظت في بعض الأحيان أنك سجلت أحرف **n** و**n** ناقص ١ وأشياء مماثلة.
وفكّرت أنّ هذه الخطوات لا تضمن الوصول إلى النجاح بينما يعتبر التركيز على التفاصيل وبصورة خاصة الحالات الصغيرة الطريق التي تقود بالفعل إلى النجاح

أنا أوافقك الرأي أوافقك الرأي
وعليه، ثمة خلاصة هنا. الخلاصة هي أنّه من السهل جداً لدى محاولة التعامل مع مسألة معقدة أن تتذمر من هذا الأمر إلا أنه غالباً ما يأتي الحلّ لهذه المسألة المعقدة من خلال التركيز فعلياً على شيء ما يكون بحد ذاته سخيفاً بعض الشيء.

عندما طلبت منك العثور على رقم لا يمكن قسمته بالتساوي على ٢ بدا الأمر تافهاً جداً ولكنه كان الخطوة الأولى التي قادتك إلى الاستدلال النهائي الذي توصلت إليه. لذا أعتقد أنّ هذا الأمر عادة ويكمن كامل الهدف من هذا المقرر في أن نسأل أنفسنا ما إذا كان بإمكاننا التعرف على عادات ذهنية سترى في حال طبقتها أنت شخصياً في حياتك اليومية أنّك ستقوم بصورة سحرية بأمور لم تكن قادراً على القيام بها من قبل؟ وستتمكن من حل مسائل لم تكن تتمكن من حلها من قبل. ويمكنك أن تواجه تحديات لم تستطيع على مواجهتها من قبل هذا هو الهدف من هذا الصف.
مسألة سحرية نوعاً ما.

وبالمناسبة أنا أعلق آمالاً كبيرةً على الجميع للقيام بذلك. وهذا هو فعلاً المغزى من المسألة وأنا أعتقد أنّ المثال الذي قدمناه رائع. وسأطلب من الآن الجميع القيام بتمرين آخر
لنعد إلى المسألة ونفكر فيها بالكامل لنأخذ ورقةً بيضاءَ فارغةً لا تنظر إلى الأشياء التي قمت بها في السابق وحاول أن تتجنب تذكرها حتى وبدلاً من ذلك فكر بصورة أكبر في إعادة التركيب فقد تحاول العودة إلى اي مسألة وتقول آه لقد نسيت ومن الطبيعي أن تنسى ولكن إذا كنت تعرف كيف تطور فكرةً ما ستتمكن من تطويرها في أي وقت لذا هيا نأخذ ورقةً بيضاء فارغةً ولنجرب الاختبار بأنفسنا.

خُذ ورقةً بيضاء فارغةً وحاول لبعض الوقت إعادة **التفكير** في كامل عملية الاستكشاف. وفي غالبية الأحيان تكون الطريقة التي تقدم فيها المعارف في الصف وغيرها، هي نسخة نهائية مصقولة. لذا ما سننتجه هنا الآن هو شيء قريب من النسخة النهائية المصقولة. وبالمناسبة إليك ما سيحدث أنا أتوقع ما الذي سيحدث لاحقاً.
سيصل كولمان في الواقع إلى طريق مسدود مرة أو مرتين بحيث لا يبدو له ما يقوم به صحيحاً وسيتشوش تفكيره نوعاً ما. وحينها قد يأخذ هذه الورقة ويضعها بعيداً بعد أن يحاول مراراً وتكراراً حل المسألة. ويبدأ من الصفر ويكرر فعلته محاولاً تطوير حل جديد وبعد أن يقوم بذلك ثلاث مرات، فهو سيكتسب المعرفة إلى الأبد.
هذا أمر مهم

ولكن الطريقة الأفضل هي أن تقوم بشرح المسألة لشخص ما وبالتالي ما عليك سوى العثور على هذا الشخص وشرح الفكرة له.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٢. ٩:	**الدليل على أن الأعداد الأولية لا متناهية وردود فعل الطلاب**
الموضوع ٣:	**كيفية التعلم**

بالمناسبة هذا --- أو بالأحرى ما نتوقعه هو أنّ الأفراد سيتقدمون سريعاً في هذه العملية من خلال مشاهدتها ولكن سبب أهميتها يعود إلى واقعيتها فها أنت قد فهمتها واعتقدت أن الأمور كانت تسير على خير ما يرام بالنسبة إليك ولكنني كنت أعرف، وليشهد السجل أنني توقعت

نعم هذا صحيح

أنّك كنت ستواجه بعض التحديات

والسبب هو أنني اختبرت ذلك

واختبرت ما يعنيه تعلم شيء ما بالنسبة لأي شخص، ما يعنيه تعلم شيء جديد. فهو ينطوي على تكرار هذه العملية نفسها أكثر من مرة وعندما تطبقها مجدداً، من المفيد لك على وجه التحديد، الانتظار لمدة يوم واحد وليس من السيء تطبيقها مرات متعددة بينما لا تزال حاضرةً وناشطةً في ذهنك.

ولكن انتظر لمدة يوم واحد ويعود السبب في ذلك إلى أنّ الهدف من ذلك يكمن في القدرة على إعادة تركيبها عوضاً عن تذكرها.

لديك ذاكرة جيدة وتستطيع تذكر الأشياء. فإذا قلت لك شيئاً ما باللغة اليابانية وكررته بما يكفي يمكنك قوله. من دون أن تكون لديك أدنى فكرة عمّا يعنيه.

ولكن الهدف هو الفهم. وعندما تضع هذا الهدف نصب عينَيك، ما عليك فعله حينها هو أخذ ورقة بيضاء وإعادة تركيب العملية التي طورتها.

لاحظتُ أنّك في وقت مبكر من التمرين، مبكر جداً كنتَ تحاول أن تتذكر تقريباً ما قيل عوضاً عن السماح لنفسك بالتفكير يجدّ بهدف إثبات أنه ثمة عدد لا نهائي من **الأعداد الأولية**.

هل فهمت ما الذي أقصده؟

عليك أن تقول حسناً إنّ هدفي يكمن في إثبات أنّه ليس هناك فقط عدد نهائي من الأعداد الأولية وليس هناك فقط عدد واحد أكبر. كيف سأقوم بذلك؟

ما الذي يتعلق بهذا الأمر؟

وأعتقد أن جزءاً من بداية التمرين انطوى على حفظ الأشياء التي ذكرناها. ومن ثم بدأت بالعمل وكنت غامضاً بعض الشيء حيال سبب فعلك بما تقوم به. ولكن عليك ان تكون واضحاً جداً في ما يتعلق بهذا السبب.

أنت تحاول العثور على **أعداد** لا يمكن قسمتها بالتساوي على أعداد أخرى لأنّ هذا الأمر هو إحدى خصائص **العدد الأولي**. لا يمكن قسمته بالتساوي على الأعداد.

ومن ثم انتقلت إلى **التفكير** في ما إذا كان بإمكانك تركيب الأعداد التي لا يمكن قسمتها بالتساوي على أعداد أخرى. ومن ثم استخدامها معاً في إحدى المعادلات ويصبح كل ذلك أكثر وضوحاً بالنسبة إليك جراء تكراره في ذهنك.

وبالنسبة إليّ، تنطوي خلاصة التمرين إذاً على أنّ الأفكار أولاً-- ثمة **خلاصات** متعددة لهذا التمرين. وتنطوي إحدى الخلاصات على أنّ الرياضيات **علم عقلاني** وثمة سبب يقف وراء المنحى الذي اتخذه تقديم **الدليل** على هذه النظرية فهو لا يأتي من **العدم**. بل ينبع في الواقع من **التفكير السليم**.

فإذا فكرت بوضوح كبير في ماهية هدفك تتخذ الخطوات التي تقودك في الواقع إلى **الفهم** بنجاح. أنه لا بد من أن يكون هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية ومن بين الدروس المتعددة الأخرى المستفادة من هذا التمرين هو درس الانطلاق من الأساسيات لفهمها والتمسك بها بوضوح ودراسة حالات بسيطة جداً ولكن مع فهمها بعمق. وهذا ما حدث عندما درست العدد ٢ ومن ثم العدد ٣ وباقي القسمة ١.

ودرست ضرب ٢ في ٣ وإضافة ١، وكيفية الحصول على باقي قسمة ١ عند القسمة على ٢ والحصول على باقي قسمة ١ عند القسمة على ٣.
أما وضوح سبب إنتاج عدد محدد مع هذا النوع من باقي القسمة عند إجراء عملية القسمة فهو الذي سمح لك بالمضي قدماً

ولكن الأنواع الأخرى من الدروس المستفادة هي دروس عملية تتعلق بأفراد حقيقيين. وهذا أمر صعب يتطلب تكرار العملية. وإلا ستنساها. وحتى بعد التعرف عليها وتطبيقها بصورة جيدة جداً، إذا حاولت بالفعل تطبيقها على ورقة بيضاء فارغة ستتعثر ولن تكون واضحةً بالنسبة إليك ١٠٠٪.

فهو جرب ذلك ثلاث مرات على ورقة بيضاء فارغة من دون العودة إليها وفور التعثر كان يعود ليقرأ الملاحظات. ولكنك ستتعثر مجدداً بالفعل لدى استخدام الورقة البيضاء وإذا قمت بذلك ثلاث مرات، لأنني أرى المرات الثلاثة كافيةً نوعاً ما بالمناسبة.

وأحياناً يتطلب الأمر أربع مرات وأحياناً خمس مرات. أو أحياناً مرتين. ولكن الفكرة هي أنها **عملية**. ومن خلال القيام بهذه العملية ستكتشف بصورة رائعة أنّ معارفك وبدلاً من أن تكون غامضةً وسريعة الزوال نوعاً ما وبدلاً من أن تأتي وتختفي ولا تسمح لك بالارتكاز عليها ستكوّن أسساً متينة تماماً تطور على أساسها أموراً مذهلةً فيك أنت.

وهذا هو الهدف مما يجب على كل شخص...
-- إنّه لحقاً شيء سحري نوعاً ما بالنسبة إلى الأفراد والتعرف على الدرجة التي يمكنهم من خلالها تطوير أنفسهم ليصبحوا أشخاصاً رائعين. فهم يتمتعون بحس الابتكار وهي مسألة تتعلق باستكشاف الاستراتيجيات التي تمنحهم القدرة على التعبير عن هذا الحس. وكانت هذه التجربة بالتالي تتعلق بفهم نظرية محددة في **الرياضيات**، وحقيقة أنه ثمة عدد لا نهائي من الأعداد الأولية وإنما الأهم من ذلك التعرف على الإجراءات التي تسمح باكتساب هذه الفطنة.

حظاً موفقاً إذاً.

الأسبوع الثاني:	**فهم الأمور البسيطة بعمق – عمليّة الضرب**
المحاضرة ٢. ٩:	**الدليل على أن الأعداد الأولية لا متناهية وردود فعل الطلاب**
الموضوع ٤:	**إنهاء الأسبوع ٢ بقوة**

لقد تناولنا مواضيع متعددة تتعلق بفهم **الأعداد**. ورأينا كيف يمكننا البحث في الضرب كفكرة بسيطة. ولكن التفكير فيه بطريقة قد تكون مختلفةً وموضِّحة لأفكار لم تخطر على بالنا من قبل.

ومن ثمّ تحدثنا عن **الأعداد الأولية** وكيفية دراسة العناصر للتحدث عن الأعداد نفسها.

وأخيراً تحدثنا عن الأفكار الخاصة بالأعداد والتي أدخلت مفهوم العدد لدينا في إطار **اللاعقلانية والعقلانية والأعداد العشرية.**

وقد كانت كلّ هذه الأمور خير أمثلة عن أخذ فكرة بسيطة أي فكرة الأعداد البسيطة والتحقق من مدى الغنى المحيط بها من خلال تتبع تدفق الأفكار وفهم الأشياء البسيطة بعمق.

وفي القسم التالي، سنوسع هذه الفكرة بصورة أكبر حتى من خلال الذهاب إلى اللانهاية وما هو أبعد من ذلك.

إذاً، إلى اللقاء.