نص محاضرات الأسبوع الثالث من مساق "التفكير الفعّال من خلال الرياضيات"

الأسبوع الثالث:	الأعداد – الأعداد غير النسبية
المحاضرة ١.٣:	رؤية تدفق الأفكار: اكتشاف الأعداد
الموضوع ١:	مدخل إلى الأعداد

مرحباً. أريد التكلّم اليوم عن طريقة تطوير الأفكار.

بشكل عام، يتمحور هذا المساق حول هذا الموضوع. كيف نطوّر الأفكار ونكتشفها وننشئها؟ إن كنت أنصحك بشأن كيفية التصرف كطالب في صفّ ما، كنت لأقول لك أن تحاول تخيّل أنك أنت المكتشف.

كلّ فكرة تتعلّمها هي فكرة سبق أن فكّر فيها شخص ما أولاً. وعندما كان هذا الشخص يفكّر في هذه الفكرة، هو قد استنتجها من استراتيجيات نشأت بعد القيام بالعديد من التحقيقات. ففي كلّ مرة أتعلّم وحدي عن موضوع، أحاول أن أقول لنفسي، ما الذي جعلني أفكّر في هذه الفكرة؟ ما الذي كان عليّ أن أعرفه مسبقاً؟ ما هي الأمثلة ذات الصلة بالموضوع؟ ما هي المعلومات التي كان عليّ أن أعرفها مسبقاً؟ وما هي استراتيجيات الاستكشاف التي كان عليّ اعتمادها لاستنتاج هذه الفكرة الجديدة؟

لذلك، كلّما أتعلّم موضوعاً جديداً، أسأل نفسي هل أعرف هذه الفكرة تماماً بحيث أقول لنفسي، أجل، إنه الأمر البديهي الذي كنت لأستنتجه.

ربما لم أفكّر في هذه المسألة، لكنني كنت لأفكّر فيها. لذلك، سنقوم اليوم ببعض الاستكشافات حول الأعداد. وسنرى كيف سيتقدّم استكشاف الأعداد هذا من خلال اتّباع استراتيجيات الأفكار الممتدّة التي نملكها، من خلال النظر إليها من وجهات نظر مختلفة، محاولين أن نكون واضحين قدر الإمكان، ومفصّلين قدر الإمكان. ومن ثمّ سنستخدم هذه الاستراتيجيات كعدسة مكبّرة للأفكار، ونناقش ونعتمد مفاهيم معيّنة ونطوّرها أكثر، لاستنتاج دلالة أكبر منها.

الأسبوع الثالث:	الأعداد – الأعداد غير النسبية
المحاضرة ١.٣:	رؤية تدفق الأفكار: اكتشاف الأعداد
الموضوع ٢:	مدخل إلى مارشال

الآن، لنتعرّف إلى مارشال. قل مرحباً يا مارشال.

مرحباً.

حسناً، ها هو مارشال. سنقوم الآن بعرض كيفية اكتشاف الأعداد.

يتعلّق المبدأ الأساسي للأعداد بالعدّ البسيط—١، ٢، ٣، ٤، ٥. هذه هي أساسيات الأعداد. وتخطر هذه الأفكار في بال معظم الأشخاص، أي عدّ الأعداد التي تُسمّى بالأعداد الطبيعية فهي في الواقع طبيعية.

إنها بسيطة لدرجة أنها تبدو كفكرة بسيطة. ولكن في الواقع، أظن أنه ثمة أسئلة عديدة حول هذه الفكرة. لأنه ثمة مجموعات عديدة من الأشخاص حتى في أيامنا هذه، يعيشون في ظروف مشابهة لتلك التي كان يعيش فيها أسلافنا منذ آلاف السنين. ولم يستطيعوا حينها عدّ ١، ٢، ٣، ٤، ٥ إلى ما لا نهاية.

تشكّل أعداد ما لا نهاية فكرة غامضة. وثمة بعض الأشخاص الذي يعدّون حالياً 1،2،3 والعديد. لأنهم لا يفرّقون بين تلك الأعداد الكبرى. ولكن، سنعتمد عدّ 1،2،3،4، كفكرة بسيطة، وسنكملها إلى ما لا نهاية، إنها فكرة بسيطة جداً.

أمّا السؤال فهو كيف سنوسّع هذه الفكرة البسيطة لتشكّل مجالاً مفصّلاً أكثر؟

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣.٢:	**الأعداد توسّع مفهومَي الأقل من والأكثر من**
الموضوع ١:	**النصف**

في حال الأعداد، أعتقد أنّ الفكرة الأكثر بديهية للأعداد هي التكلّم عن مفهومَي **الأقل من والأكثر من**. أي تلك الأعداد المتسلسلة.

عندما تعدّ ١، ٢، ٣ تفكّر في مفهوم الأكثر من ثم يخطر في بالك مفهوم الأقل من. لذلك، بإمكانك صفّ كلّ هذه الأعداد في خطّ واحد. مفهوم؟

ومن خلال مفهومَي الأقل من والأكثر من رسمت هنا رسماً توضيحياً لهذه الفكرة. ومع اعتماد فكرة مفهومَي الأقل من والأكثر من في خط واحد، ماذا بإمكانك فعله لإنشاء **العدد النسبي**؟

حسناً، بإمكاننا تقسيم الخط إلى أجزاء صغيرة. وما حجم الأجزاء التي ستختارها؟ ما هي الطريقة الطبيعية لتقسيم حجمٍ أو طولٍ معيّن؟

بإمكاننا البدء بأعداد النصف.

حسناً، جيد.

وإن كان لديك جزء من خيط، فكيف ستخلق عدداً يتمتع بطول نصف هذا الجزء؟

من خلال ثني الخيط إلى نصفين. يُثنى إلى جزئين، وتُعدّ نقطة الثني التي تجمع الجزئين نقطة النصف.

والآن، كيف ستوسّع هذه الفكرة؟ بعبارة أخرى، أتيحت لك الفرصة لخلق اسم نقطة مختلفة على طول هذا الخط المحتمل الذي يتألف من عدة مواقع. ومن خلال ثنيها إلى نصفين تكون قد عيّنت نقطة النصف بالتمام بين نقطة ٠ و ١.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣.٢:	**الأعداد توسّع مفهومَي الأقل من والأكثر من**
الموضوع ٢:	**الأعداد الكسرية**

الأستاذ: بأي طرق أخرى بإمكانك إنشاء أعداد؟

الطالب: بإمكانك ثني المقطع إلى ثلاثة أجزاء.

الأستاذ: طبعاً. بإمكانك ثنيه إلى ثلاثة أجزاء متساوية، وإلى آخره. بإمكانك ثنيه إلى أربعة أو خمسة أجزاء متساوية أو إلى أي عدد يتمتّع بأجزاء متساوية.

والآن، ما أراه مثيراً للاهتمام هو أنه عندما تعتمد مفهوماً محدداً لما تقوم به الآن أي إنشاء الأعداد غير النسبية فهو عمل طبيعي يهدف إلى تعيين أسماء النقاط المختلفة المتواجدة على هذا الخط الذي يحوي كميّات محتملة. إنك تعيّن أسماءً لتلك النقاط التي تحصل عليها عندما تثني فاصلاً إلى عدد متساوٍ من الأجزاء.

والآن، ما رأيك بشأن تعيين نقطة تنتج عن تقسيم المقطع إلى ثلاثة أجزاء متساوية؟

الطالب: كنت لأكتبها كعدد نسبي.

الأستاذ: أجل.

ولماذا تُعدّ هذه فكرة جيدة؟

الأسبوع الثالث:	الأعداد – الأعداد غير النسبية
المحاضرة ٣.٢:	الأعداد توسّع مفهومَي الأقل من والأكثر من
الموضوع ٣:	لماذا تكون تسمية العدد النسبي منطقية

الأستاذ: على فكرة، كيف من الممكن أن تخطر في بالك فكرة تسمية نقطة تنتج عن تقسيم الخيط إلى ثلاثة أجزاء متساوية؟

الطالب: كنت لأكتبها كعدد نسبي.

الأستاذ: حقاً؟ ولماذا تُعدّ هذه فكرة جيدة؟

الطالب: لأنّها تستخدم الأعداد الطبيعية التي سبق لنا أن حدّدناها بطريقة جديدة.

الأستاذ: أجل. أجل، هذا صحيح. بعبارة أخرى، لقد استخدمت طول ١ على سبيل المثال. ومن خلال تقسيمه إلى ثلاثة أجزاء متساوية ستحصل على جزء يساوي حجمه ٣/١. وعندها، بإمكانك أن تسأل نفسك، على كم جزء قد حصلت؟ ومن ثمّ تقول، حسناً لقد حصلت على جزء واحد. أي ما يُعادل ١ على ٣، أو أكون قد حصلت على جزئين. أي ما يُعادل ٢ على ٣. لذلك، تكون تسمية العدد النسبي منطقية. إذ ثمة سبب وراء ذلك. فإنك تحاول معرفة أمر ما.

أنت تحاول معرفة عدد الأجزاء التي حصلت عليها. على كم جزء بطول ٣/١ قد حصلت؟ لقد حصلت على جزء واحد، جزئين. أو من الممكن أنك حصلت على الأجزاء الثلاثة.

الطالب: ثمّ ستحصل على ١.

الأستاذ: ثمّ ستحصل على ١. هذا اسم آخر يمكن استخدامه لهذا الطول نفسه. فعدد ١ يساوي ٣ على ٣. بإمكانك الاستمرار إلى أبعد من ذلك.

الطالب: ٤ على ٣.

الأستاذ: ٤ على ٣. ٤ على ٣، و٥ على ٣، إلى آخره. بإمكانك الحصول على أي عدد ثلث مشابه مع الأعداد الرباعية والخماسية، إلى آخره.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣.٢:	**الأعداد توسّع مفهومَي الأقل من والأكثر من**
الموضوع ٤:	**مبدأ العدد النسبي**

في هذا السياق، أولاً، تعتبر تسمية الأعداد عملية **منطقية**. وهي منطقية لأنّ العدد النسبي منطقي. كأنك تقسم طولاً معيّناً إلى أجزاء متساوية. لذلك، يُعدّ طول أحد هذه الأجزاء عدداً طبيعياً مثل ¼.

وإن كان لديك ثلاثة أجزاء، فستحصل على ثلاثة أعداد من هذا النوع من الطول. لهذا السبب، تُعدّ فكرة الأعداد النسبية طبيعية إلى هذا الحدّ.

إنه أمر بإمكانك تخيّله، أجل. إن كنت قد ابتكرت فكرة الأعداد، من الطبيعي أن أفكّر في فكرة الأعداد النسبية. فكيف ستتمكّن من توسيع فكرة الأعداد بطريقة أخرى؟

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٣:	**من الخيال إلى الواقع – الأعداد السالبة**
الموضوع ١:	**الأعداد السالبة**

بإمكاننا الانتقال إلى **عدد سالب**.

بالضبط.

فإن كان لديك خط، فسينتقل الخط أولاً إلى جهة اليمين. أي واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة. فيزيد العدد تدريجياً.

حسناً، عندما يتشكّل الخط بإمكانك أن تسأل نفسك ما إذا يمكنك التوجه إلى جهة اليمين. وتطرح السؤال، هل بإمكانك التوجه إلى جهة اليسار واستنتاج أفكار مهمة من تلك الحركة.

بالطبع، بإمكانك القيام بذلك. يمكنك أن تسأل نفسك: "حسناً، إن كان لدي وحدة تشكّل طول عدد واحد، ثم اثنان، ثم ثلاثة، كما من الممكن الانتقال إلى الأعداد السالبة بدءاً من الصفر، أي ناقص واحد ناقص اثنان، ناقص ثلاثة. وبالتالي، بإمكاني ابتكار مفهوم الأعداد السالبة فقط من خلال فكرة توسيع فكرةٍ ما بأي طريقة تخطر في بالك.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣.٣:	**من الخيال إلى الواقع – الأعداد السالبة**
الموضوع ٢:	**الأعداد السالبة الخيالية**

بالمناسبة، إنّ فكرة الأعداد السالبة التي تنتمي إلى هذا التجريد الذي نتحدّث عنه لم تكن فكرة خطرت في بال الإنسان على الفور. بل تمّ تصوّر فكرة الأعداد السالبة كعدة أفكار **خيالية** تعود إلى عهد **اسحق نيوتن**، أي في حين لم تكن الأعداد السالبة تُعتبر، إن صحّ الكلام، أعداداً موجبة. بل كانت تُعتبر غريبة بعض الشيء. وتطلّب اعتياد الناس على هذه الفكرة وقتاً طويلاً.

تتمحور إحدى الأفكار ذات الصلة بتوسيع وابتكار الأفكار حول السماح لنفسك بالتخلي عن التحيزات والعادات التي عادة ما تعتمدها، وتوسيع آفاقك بطرق مختلفة.

بالفعل، تتمتّع هذه الاستراتيجية بقوة مذهلة.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣.٣:	**من الخيال إلى الواقع – الأعداد السالبة**
الموضوع ٣:	**السر وراء الأعداد غير النسبية**

إذاً لدينا الأعداد النسبية، الموجبة والسالبة على حد سواء. لدينا أمور عدّة هنا.

الآن، ما هو السؤال التالي الذي قد ترغب في طرحه حول هذا الموضوع؟ هل ثمة مزيد من الأعداد؟

بالضبط، أجل. أجل، هذا سؤال بديهي جداً.

هل ثمة أعداد لا تُمثّلها كلّ هذه الأساليب التي اكتشفناها حتى الآن؟

بعبارة أخرى، بإمكاننا عرض عدد لا متناه من الأعداد المتواجدة بين العددين ٠ و ١. بإمكاننا تعداد أعداد النصف والثلث والربع والأعداد الخماسية والمليون والمليار والتريليون.

بإمكانك، إلى أي حدّ من الدقة تسمية تلك النقاط المتواجدة بين العددين ٠ و ١. لكن السؤال الذي طرحته للتو، مهلاً. هل ثمة أعداد طول غير متساوية لعدد نسبي ينتمي إلى عدد صحيح يعلو عدداً صحيحاً آخر؟

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٤:	**المنطق وراء مبدأ الأعداد غير النسبية**
الموضوع ١:	**يقول اليونان إنّ كلّ الأعداد كسرية**

الأستاذ: ما رأيك؟

الطالب: يبدو الأمر مرجحاً.

الأستاذ: يبدو مرجحاً؟ لم يبدُ ذلك الأمر مرجحاً بالنسبة إلى اليونانيين القدامى. فقد اعتقد اليونانيون القدامى أنّ ذلك الأمر لم يكن صحيحاً. بل ظنوا أنّ كلّ الأعداد هي **نسبية**.

على كلّ حال، لم يكونوا يعلمون بشأن تسمية الأعداد النسبية. فلم ينظروا إلى الأعداد النسبية بمنظورنا الحالي أي أنها تقع على خط مستقيم من الأعداد الصحيحة.

تطلّب تطوير كلّ تلك الأفكار آلاف السنين. ورغم أنه كان لدى اليونانيين القدامى، من بين مجموعات أخرى ومن مناطق أخرى حول العالم، علماء بارعون في مجال **الرياضيات** حتى في ذلك الزمان القديم، إلاّ أن الأفكار ذات الصلة بخط الأعداد التي نطوّرها حالياً، لقد شكّلت هذه الأفكار تطوّرات حديثة مفاجئة.

قد تظنّ أنها من بين المسائل التي حدثت مؤخراً لكنها ليست كذلك.

ولكنّ، اكتشف الناس في العالم القديم أنه ثمة أطوال لا تساوي أي عدد نسبي. وكان ذلك الاكتشاف مفاجئاً جداً. لذلك، أرغب في الحصول على بضع دقائق لمحاولة فهم سبب وجود أطوال لا تشكّل أعداداً نسبية.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٤:	**المنطق وراء مبدأ الأعداد غير النسبية**
الموضوع ٢:	**الجذر التربيعي للعدد ٢**

السؤال الذي نحاول طرحه هو هل من المحتمل أن يكون هناك طول معيّن يتم تمثيله كعدد **نسبي**؟ لذلك، سأعطي طولاً معيّناً لرؤية ما إذا يمكن تمثيله كعدد نسبي. وسنرى كيف ستتمكّن من اكتشاف هذه الفكرة.

لنأخذ الطول الذي عندما تضربه بنفسه، تحصل على عدد ٢. بعبارة أخرى، الجذر التربيعي للعدد ٢.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٤:	**المنطق وراء مبدأ الأعداد غير النسبية**
الموضوع ٣:	**ماذا لو كان الجذر التربيعي للعدد ٢ عدداً كسرياً؟**

إنّ الجذر التربيعي للعدد ٢، إن كان هناك عددان سيكونان عددين محدّدين. ثمة حرف ,1,354 **a** يساوي قيمة معيّنة قد تكون مشابهة للعدد ٤٥٧. عندها، سيساوي الحرف **b** عدداً آخر، مثل ٨٣٧،٤٥٢. سيكون هناك أعداد محدّدة بحيث أنّ الجذر التربيعي للعدد ٢ يساوي عدداً محدّداً يقسّمه عدد طبيعي آخر.

وإن كان ذلك صحيحاً، ماذا قد يكون صحيحاً أيضاً؟

إنها إحدى استراتيجيات البحث المعتمدة. وإن وافقت على صحّة هذا الأمر، ما هي النتائج التي قد تتأتى عنه؟ فتعتمدها وترى ما سيحدث.

على فكرة، لا أريد الكشف عن عنصر المفاجأة لكن ماذا سيحدث إن أدركنا أنّ الأمر مستحيل؟

لا يمكن لذلك أن يحدث. لا وجود لعددَي **a** و**b** الطبيعيّين، بحيث أنّ الجذر التربيعي للعدد ٢ يساوي **a** على **b**.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٥:	**اليونانيون الذين غرقوا لأنهم أفشوا سر النظرية**
الموضوع ١:	**اعتبار أن الجذر التربيعي للعدد ٢ هو عدد كسري**

سنتكلّم الآن عن الموضوع بشكل موجز لأنّنا لا نريد التعمّق في تفاصيل هذه النظرية بشكل خاص. لكنها نظرية صحيحة وأريد أن أُثبت أنها تتبع من خلال دافع التتبّع نتائج هذه الفكرة.

احتمال أنّ الجذر التربيعي للعدد ٢ يساوي عدداً نسبياً يحوي عددين طبيعيّين. على فكرة، بإمكاننا تقليص **a** و **b** إلى أدنى حدود. ممّا يعني أنّ **a** و **b** لا يحويان أعداداً نسبية مشتركة.

بالفعل، كنت تقوم في المدرسة الابتدائية بتقليصهما إلى أدنى حدود.

حسناً، لنفترض أننا قمنا بذلك.

طيب. والآن، إن كان الجذر التربيعي للعدد ٢ يساوي **a** على **b**، فما هو صحيح أيضاً؟

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٥:	**اليونانيون الذين غرقوا لأنهم أفشوا سر النظرية**
الموضوع ٢:	**البرهان**

يشير هذا الأمر إلى أنّ الافتراض بأنّ الجذر التربيعي للعدد ٢ يساوي **a** على **b**، وإن كان ذلك صحيحاً فسيكون من الصحيح أن نقول إنّ ٢ ضرب الجذر التربيعي للعدد **b** يساوي عدداً تربيعياً.

كان هذا مجرّد حساب بسيط. مفهوم؟

والآن دعني أسألك بشأن ٢ ضرب الجذر التربيعي للعدد **b** هل يساوي ذلك عدداً متساوياً أو فردياً؟
إنه عدد متساوٍ.
إنه عدد متساوٍ لأنه يساوي ٢٢ ضرب عدد ما. لذلك فهو متساوٍ. ممّا يعني أنه يشبه تماماً عدداً تربيعياً. إذاً يُعدّ العدد التربيعي متساوٍياً أو فرديّاً؟
إنه متساوٍ.
إنه متساوٍ، أليس كذلك؟ والآن هو يساوي **a** ضرب a. هل يُعدّ **a** عدداً متساوياً أم فردياً؟
إنه عدد متساوٍ.
متساوٍ.
بعبارة أخرى، يساوي عدد **a** التربيعي بما أنه عدد متساوٍ، ضعف عدد آخر، لنسمّه **n**.
حسناً.

لأنه يجب أن يكون **a** عدداً متساوياً، فإذا ضربنا عدداً فردياً بعدد فردي آخر سنحصل على عدد فردي. ونعلم أنه عندما نضرب **a** بنفسه سنحصل على عدد متساوٍ، أي ٢ ضرب عدد **b** التربيعي. وبالتالي، يساوي عدد **a** التربيعي ٢ ضرب **n** التربيعي. وإذا ضربنا هذه الأعداد، فسنحصل على ٤**n** تربيعي.

إذاً نستنتج أنّ عدد ٢**b** التربيعي يساوي ٤ أضعاف **n** التربيعي. وما الذي لا يمكنك الامتناع عن فعله؟
تقسيم العددين بالعدد ٢.
تقسيم العددين بالعدد ٢.

إذاً سيكون من الصحيح أن نعتبر أنّ **b** التربيعي يساوي ضعف العدد الطبيعي **n** التربيعي. هل يُعدّ ٢**n** عدداً متساوٍياً أم فردياً؟
إنه متساوٍ.
إنه متساوٍ. ما هي طبيعة عدد **b** إذاً؟
b عدد متساوٍ أيضاً.
b عدد متساوٍ أيضاً. بالتالي، لقد استنتجنا هنا أنّ **a** عدد متساوٍ وهناك **b** وهو عدد متساوٍ أيضاً. وما الخطأ في ذلك الاستنتاج؟

حسناً، اعتقدت أننا قلنا في البداية إنّ العددين **a** و **b** سيكونان الأصغر، أي العددين النسبيّين الأكثر تقليصاً.

الأكثر تقليصاً.

وإن كان العددان **a** و **b** يحتويان على عدد ٢ في عمليّتَي تحليل الأعداد الصحيحة إلى عواملها الأولية الخاصة بهما، لكان قد بإمكاننا إلغاؤهما.

هذا صحيح. لذلك افترضنا أنه لا وجود لعامل مشترك بينهما. ولكنه يظهر لنا أنّ **a** عدد متساوٍ يحتوي على عامل عدد ٢. كما أنّ **b** يحتوي على عامل عدد ٢. وبالتالي، يشكّل هذا الأمر تناقضاً. لأننا قلنا إنّه في حال كان صحيحاً أنّ الجذر التربيعي للعدد ٢ يساوي **a** على**b**، لذلك من المنطق أن كلّاً من العددين **a** و **b** يحتويان على عامل عدد ٢. ممّا يعني أنه لم يتمّ تقليصهما إلى أدنى حدود وبالتالي، يشكّل ذلك تناقضاً. لذلك قلنا إنّه من المستحيل أن يتمّ تقليص العددين الطبيعيين **a** و**b** إلى أدنى حدود، بحيث أنّ الجذر التربيعي للعدد ٢ يساوي تماماً **a** على **b**. لذا ساعدنا اعتماد هذا المنطق على استنتاج أنّ الجذر التربيعي للعدد ٢ أي العدد الذي نضربه بنفسه، يساوي عدد ٢ لا يمكن أن يُكتب كعدد نسبي، أي **a** على **b**.

مذهل.

أليس ذلك مثيراً للاهتمام؟

أجل.

أجل إنه كذلك. جعلنا هذا الأمر نوسّع فكرتنا حول ماهية الأعداد وما يمكنها أن تكون.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٥:	**اليونانيون الذين غرقوا لأنهم أفشوا سر النظرية**
الموضوع ٣:	**اليونانيون الذين غرقوا**

الأستاذ: بالمناسبة، سأروي لك قصة عن الأعداد **غير النسبية**. يُعدّ الجذر التربيعي للعدد ٢ عدداً غير نسبيّ. وليس عدداً كسرياً. بل عدداً غير نسبيّ.

في زمن اليونانيّين القدامى، كان لمؤيدي نظرية فيثاغورس مجتمع خاصّ بهم – فقد اشتهر **فيثاغورس** بإطلاق **نظرية فيثاغورس**.

كان لفيثاغورس مجتمع سري خاصّ به. وكان الأفراد يدرسون مواد كالرياضيات. لكنهم التزموا بكتم هذا السر. لم يكن يُسمح لهم بإخبار الناس عن مجتمعهم. وفي أحد الأيام، اكتشف أحدهم أنه ثمة أعداد مثل الجذر التربيعي للعدد ٢، ليست كسرية. أي أنها لا تشكّل نسبة عددين، أي عددين طبيعيّين. وفي زمن اليونانيين القدامى، كانت تتحدّى هذه الفكرة مفهومهم للكون، لأنهم كانوا يفكّرون ملياً بنسب الأشياء، أي انّ الموازين الموسيقية متناسبة وأنّ أقطار السماوات متناسبة.

بالفعل، كانت النسبية تؤدي دوراً هاماً في فلسفتهم. وكانوا يعتبرون الأعداد والأعداد الكاملة والطبيعية كجوهر لفلسفتهم. فعندما اكتشفوا أنه ثمة عدد، مثل الجذر التربيعي للعدد ٢ لا يمكن كتابته كعدد A على B النسبي شكّل ذلك الأمر تحدياً لهم.

إذاً، كانوا يشدّدون كثيراً على سريّة مجتمعهم. ولم يرغبوا في الإفشاء عن هذا السر. وتقول الرواية، أنّ أحد أفراد مجتمع فيثاغورس أخبر شخصاً من خارج المجتمع أنه ثمة أعداد غير نسبية. وبالطبع، بات هذا الرجل في ورطة.

الطالب: حدثت فوضى عارمة؟
الأستاذ: هل تعلم ماذا فعلوا؟
الطالب: ماذا فعلوا؟
الأستاذ: وضعوه على متن قارب في وسط البحيرة ورموه في المياه وأغرقوه. هذا ما تقوله الأسطورة.
بالتالي، رغم أننا أخبرناك عن كيفية إثبات أنّ الجذر التربيعي للعدد ٢ هو عدد غير نسبي، لا تُخبر أحداً، لأنك تعرف نتيجة ذلك.
الطالب: سنضطر إلى إغراقك.
الأستاذ: احفظ هذا السر. لا يجب أن تُفشيه.
أجل.
لم تعد تلك الفلسفة معتمدة في الرياضيات فلم نعد بحاجة إلى كتمان هذا السر بعد الآن.
حسناً، سنكتمه على كلّ حال، لأننا لا نريد تفسيره بحيث يتمكّن الناس من فهمه. إنها طريقة لكتمان السر. على كلّ حال، ثمة أعداد غير نسبية.

الأسبوع الثالث:	الأعداد – الأعداد غير النسبية
المحاضرة ٣. ٦:	استخدام الأعداد الحقيقية للدلالة على مفهومي الأقل من والأكبر من
الموضوع ١:	الأعداد العشرية عبارة عن أعداد حقيقية

لنفترض أنّه لدي فاصلة هنا، وأقول، حسناً، لدي فاصلة هنا، كيف تعرف كيف تدوّنها؟
حسناً، أستطيع أن أقيس بُعد مسافتها.
حسناً، وكيف تحدّدها؟
يمكنني تدوين **عدد عشري**.

حسناً، عدد عشري. إذاً كيف تفكّر بمدى أمان فاصلة عشوائية هنا؟ أي عدد ستدوّنه أولاً من أجل تحديد تلك الفاصلة؟
حسناً، العدد أكثر من واحد وأقل من اثنين.
نعم. إذاً أبدأ بواحد.

تبدأ بواحد. إذاً الفكرة هي أنّك ستقوم بتحديد موقع تلك الفاصلة المحدّدة على سطر الأعداد بتدوين واحد فاصلة عدد والآن، ماذا ستفعل؟ كيف أعرف أي عدد سيتبع الفاصلة العشرية مباشرة؟
لو قسّمنا هذا السطر إلى ١٠ أقسام
صحيح، ١٠ أقسام متساوية
من المفترض أن تقع في مكان ما بين اثنين من هذه الأقسام. ويبدو أنّه أكثر من أربعة وأقل من خمسة.
صحيح.

إذاً ذلك يعني أنّ العدد سيُحدّد بالعدد أربعة، لأنّه لن يكون في القسم الأول الذي من المفترض أن يبدأ بصفر، وليس في القسم الثاني الذي يبدأ بواحد، إذاً العدد التالي هو فاصلة أربعة.
الآن، كيف تحدّدها بمزيد من الدقّة؟

نستطيع أخذ العددين ١،٤ و١،٥ وتقسيمهما إلى ١٠ أقسام. عشرة أقسام متساوية. ونكرّر الأمر ذاته، وننظر إلى القسم الذي يفوق العدد الأكبر.
وبعدها ماذا نفعل؟
نقسّم ذلك القسم إلى عشرة أقسام، وهكذا دواليك.

وهكذا دواليك. والآن، إلى أي مدى تذهب قبل الحصول على عدد دقيق؟
إلى ما لا نهاية.
إلى ما لا نهاية، نعم هذا صحيح.

في الرياضيات، إذا كنّا نتحدّث عن الذرّات أو الأشياء الكبيرة بقدر الذرّات، بعد تقسيمها إلى ١٠ أقسام و١٠ أقسام، في النهاية ستصل إلى أصغر وحدة ممكنة.

حسناً، في الواقع، ربما تستطيع تقسيم الذرّات إلى جزيئات أصغر. لكن في الواقع الملموس، إذا كنت فعلاً تتعامل مع أشياء بواسطة سكّين، ستصل في نهاية المطاف إلى مرحلة، وبسرعة فائقة في الواقع، حيث لن تستطيع بأي شكل من الأشكال تقسيمها أكثر. لكن في الرياضيات، عند التفكير بالمفهوم المجرّد للأعداد، نستطيع أن نفترض أنّه يمكن تحديد موقع هذه الفاصلة إلى ما لا نهاية. ويستلزم الأمر، في الواقع، عدداً لا يُحصى من هذه الفواصل لتحديد الفاصلة بدقّة.

قد ينتهي البعض منها، إذا كانت الإجابة صائبة على السطر قد تكون صفر صفر صفر بعد فاصلة معينة، إلى ما لا نهاية. لكن عموماً، ستختلف الأعداد إلى ما لا نهاية. إذاً هذه طريقة عملية لتحديد موقع فاصلة محدّدة على السطر، ومن هنا نبعت فكرة الأعداد الحقيقية.

إذاً هذه تُدعى **أعداداً حقيقية**، وهي **الأعداد العشرية** ليس إلاّ.
كل عدد عشري هو عدد حقيقي.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٦:	**استخدام الأعداد الحقيقية للدلالة على مفهومي الأقل من والأكبر من**
الموضوع ٢:	**امتحان: تدوين كل عدد**

حسناً؟

حسناً. من الملفت أنّ هذه الأعداد **ليست كسرية** لكن كل عدد في سطر الأعداد هذا، إذا أخذنا سطر الأعداد -- إذاً ما نفعله اليوم، على فكرة، كما ترون، ما نفعله هو أنّنا نقول كيف نطوّر الأفكار بطريقة مفصّلة أكثر وقلنا حسناً، فلنأخذ الأعداد كنموذج حول كيفية تطوير مفهوم ما وإضفاء المادة والعمق إليه، ومنحه المزيد من الدقّة. وسبق لنا في هذه الحصة أن شهدنا تبلور التطوّرات الكبيرة التي ساهمت في تقدّم البشر، كما قلت، مئات السنوات إلى الأمام. لكن لا بأس في ذلك.

نحن ننجز ذلك هنا في غضون دقائق معدودة.
نحن
نحن أذكى بكثير نحن أذكى بكثير من -- نعم، أنا واثق من ذلك.

فلنرى إذاً إن كنّا نستطيع تطوير ذلك أكثر. سنتمادى أكثر في هذا الأمر.

إذاً، أصبحنا نعرف الآن أنّ بعض الأرقام غير نسبية لا يمكن تدوينها كأعداد نسبية. إذاً من خلال تحديد الأعداد على هذا السطر الذي نكتبه هذا السطر، نرى الآن أنّه يوجد أعداد --، بعض الأعداد الطبيعية--، مثل ٠ و١ و٢ و٣ و٤ و٥ وهكذا دواليك -- وتوجد أيضاً **الأعداد النسبية**، أي **الأعداد الكسرية**.

والآن اكتشفنا وجود بعض الأرقام غير النسبية. لذا أمر واحد قد يتوجّب علينا أخذه في عين الاعتبار هو كيف نحدّد كل نقطة على هذا السطر؟

أيّ استراتيجية، أو طريقة، يمكننا استخدامها لنتأكّد، أينما وضعنا علامة، من وجود تحديد معيّن لها.

الأسبوع الثالث:	الأعداد – الأعداد غير النسبية
المحاضرة ٣. ٦:	استخدام الأعداد الحقيقية للدلالة على مفهومي الأقل من والأكبر من
الموضوع ٣:	٠،٩٩٩٩...

الأستاذ: حسناً. إذاً أودّ أن أتكلّم عن بعض الأمور لاستكشاف فكرة **الأعداد الحقيقية** هذه. إذاً بعض هذه الأعداد كسري، والبعض الآخر غير نسبي.

التلميذ: وأنت تعني جميعها، أليس كذلك؟

الأستاذ: جميعها، لأنّ تعريف الأعداد غير النسبية هو أنها أعداد غير كسرية. إذاً نعني كل الأرقام المتبقّية. إذاً لدينا الأعداد الكسرية وكل الأعداد الأخرى. هذه الفكرة.

إذاً دعني أسألك عن عدد معيّن وأنت تقول لي ما هو العدد إذاً دعني أبدأ بهذا العدد هنا، العدد هناك، وهو ٠،٩٩٩ إلى ما لا نهاية.

حسناً.

إذاً، بعبارة أخرى، نأخذ الفاصل بين ٠ و ١، ونقسمه إلى ١٠ أقسام متساوية، وهذا في القسم الأخير من هذه الأقسام. ثمّ نقسم ذلك إلى ١٠ أقسام متساوية، وهو في القسم الأخير منها. ثمّ نقسم ذلك إلى ١٠ أقسام متساوية، وهو في القسم الأخير منها. إذاً ما هو هذا العدد، **العدد الحقيقي**؟

التلميذ: حسناً، يبدو أنّه العدد الأقرب من ١.

الأستاذ: هذا ما يبدو.

التلميذ: هذا أقل من ١.

الأستاذ: صحيح. يبدو أنّه العدد المباشر قبل ١ --

التلميذ: لكن أقل بقليل.

الأستاذ: لكن أقل بقليل، نعم. إذاً فلنفكّر بذلك، على فكرة، هذا أمر ملفت نوعاً ما. فلنفكّر بهذا الأمر. إذاً لدينا هذا العدد.

حسناً. فلنسمّه x. حسناً؟

الآن، كيف نحدد عدداً عشرياً في الرقم ١٠؟

التلميذ: نغيّر مكان الفاصلة بعدد واحد فقط.

الأستاذ: نغيّر مكان الفاصلة بعدد واحد فقط. إذاً كم يساوي **١٠x**؟

التلميذ: ٩،٩٩٩

الأستاذ: ٩،٩٩٩ إلى ما لا نهاية حسناً. الآن، إذا طرحنا **١x** من ١٠ **x**، كم **x** يبقى لدينا؟

.

التلميذ: ٩

الأستاذ: وإذا طرحنا ٩،٩٩٩٩٩ إلى ما لا نهاية، وطرحنا من ذلك ٠،٩٩٩٩٩٩ إلى ما لا نهاية، ماذا تكون النتيجة؟

التلميذ: يجب أن نحصل على العدد ٩.

الأستاذ: تكون النتيجة ٩ بالضبط لأنّ كل مسألة "إلى ما لا نهاية" تتلاشى. لذلك، إذا كان العدد **٩x** يساوي ٩، كم يساوي العدد x؟

التلميذ: ١

الأستاذ: ١. ليس ما يقارب العدد ١. يساوي ١ بالضبط. الآن قد يُصدم الكثير من الناس بأنّ العدد ٠،٩٩٩٩٩ إلى ما لا نهاية يساوي ١. لكن، في الحقيقة، ما هو إلا تسمية أخرى للعدد ١. إنّه بالضبط كحقيقة أنّ ٣/٢ يساوي ٦/٤. صحيح؟ إنهما وجهان لعملة واحدة. ومن المنطلق نفسه، ٠،٩٩٩٩٩ إلى ما لا نهاية هو مجرّد طريقة طويلة لتدوين العدد ١. إنّهما ليسا عددين متقاربين. إنّهما العدد ذاته تماماً. إنّهما طريقتان مختلفتان لتسمية العدد ذاته.

إذاً، هذا الأمر ملفت، أليس كذلك؟

التلميذ: وكأنّه إن كان الثلث يساوي ٠،٣٣٣ إلى ما لا نهاية، فثلاثة من هذا العدد تساوي ٠،٩٩٩٩٩.

الأستاذ: بالضبط. هذه طريقة أخرى للنظر في المسألة. هذا صحيح تماماً. لأنّ الثلث يساوي ٠،٣٣٣، أضربه بـ٣، يساوي أعداد ٩
التلميذ: حسناً.

الأستاذ: جيّد جداً. إذاً ثمة طريقتان، في الواقع، للنظر إلى العدد ٠،٩٩٩ إلى ما لا نهاية الذي يساوي ١. وتروي كلاهما الحكاية ذاتها، لأنّه صحيح أنّه يساوي العدد ١ بالضبط. حسناً.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٧:	**الثلث بصيغة عشرية**
الموضوع ١:	**أي الأعداد العشرية تُعتبر أعداداً نسبية؟**

لدى دراسة سطر الأعداد هذا، كل هذه **الأعداد العشرية**، ما السؤال الذي تطرحه على نفسك بشأن هذه الأرقام العشرية؟

حسناً، لمَ يمكن تمثيل بعضها **بأعداد نسبية** والبعض الآخر لا؟

نعم.

إذا أصبحنا نعرف أنّ بعضها يمكن تمثيلها بأعداد نسبية والبعض الآخر لا يمكن تمثيلها بأعداد نسبية. لذا من الملفت التطرّق إلى هذا السؤال، هل من طريقة للنظر إليها والقول، نعم، هذا العدد نسبي، وصحيح، ذاك العدد غير نسبي. كم من الجميل أن ننظر إلى عدد عشري، ونقول، نعم، هذا العدد يمكن تمثيله كعدد نسبي، وذاك العدد لا.

حسناً.

فلنرَى إن كان يمكننا الإجابة على هذا السؤال، ولنرى كيف يمكنك أن تعالج الموضوع.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٧:	**الثلث بصيغة عشرية**
الموضوع ٢:	**الانطلاق من أفكار قديمة للتوصّل إلى أفكار جديدة**

سوف أدوّن عدداً عشرياً، وأودّ منك أن تفكّر كيف تحوّله إلى عدد نسبي، إن استطعت.

الآن، أول عدد سأدوّنه هو عدد تعرف أنّ باستطاعتك تحويله، وهو ٣٣٣، إلى ما لانهاية، وهو عدد، وسنسمّيه x. والسؤال هنا هو هل تستطيع أن تعرف أنّ هذا العدد نسبي لو لم تكن تعرف ذلك مسبقاً وهو يساوي ٣/١؟ هل من طريقة يمكنك استخدامها لتعرف أنّ هذا العدد **نسبي** بالفعل؟

وعلى فكرة، تستعين هذه المسألة بإحدى الاستراتيجيات الأساسية لابتكار الأفكار الجديدة، وهي استراتيجية مهمّة للغاية، وتستحقّ التركيز عليها فعلاً.

خير طريقة لابتكار فكرة جديدة هي الانطلاق من فكرة قديمة. الإنسان ليس نبيهاً إلى هذه الدرجة. ما من إنسان بهذا الذكاء. كل فكرة، في الواقع، تنبع من فكرة سابقة. ورد قول مأثور رائع لإسحق نيوتن، في مقدّمة كتاب "**المبادئ**"، قال فيه: "*إذا كنت قد رأيت أبعد من غيري، فذلك لأنّني وقفت على أكتاف العمالقة*". وهذه حقيقة بالتأكيد، بأنّ أفضل مصدر لفكرة جديدة هو الانطلاق من أمر سبق أن نجح، واستخدامه مجدداً. وتستخدمه ثمّ ترى إلى أي حدّ يمكنك دفع هذه الفكرة.

إذاً كل فكرة تقريباً مشتقّة، ونابعة عن استكشاف سابق يتمّ الإسهاب في توسيعها، ثمّ يُحدّد بوضوح إلى أي مدى يمكن توسيعها ويمكنك النظر إليها بوضع مختلف.

إذاً سؤالي لك هو، هل من استراتيجية سبق لك أن رأيتها ويمكنك تطبيقها على هذه الحالة؟

الأسبوع الثالث:	الأعداد – الأعداد غير النسبية
المحاضرة ٣. ٧:	الثلث بصيغة عشرية
الموضوع ٣:	هفوة

حسناً، أعتقد أنّ هناك استراتيجية.

نعم، صحيح.

حسناً. وما هي؟

حسناً، نظرنا في وقت سابق اليوم إلى الجذر التربيعي للعدد ٢، وسألنا إذا كان يمكن تمثيله كـ **a** على **b**. إذاً، ربما يمكننا النظر إلى العدد ٠،٣٣٣٣ ورؤية ما إذا كان يمكن تمثيله **a** على **b**.

حسناً، جرّب لرؤية ما إذا كان ذلك صحيحاً.

حسناً، نعرف أنّه لو كان العدد ٠،٣٣٣٣ إلى ما لانهاية يساوي **a** على **b**، إذا ٠،٣٣٣٣ يساوي -- عفواً -- **b** ضعف ٠،٣٣٣ يساوي **a**.

حسناً، هيّا دوّن ذلك.

إذاً، عرفنا مسبقاً أنّ الجذر التربيعي للرقم ٢ يجوز إعادة تدوينه ٢ك إذا وجدنا الجذر التربيعي للجهة الأخرى. هل تعرف أي شيء عن العدد ٠،٣٣٣؟

نعم، ماذا تعرف عن ذلك؟

هل تعرف أي شيء عن العدد ٠،٣٣٣٣٣؟ ماذا يتبادر إلى ذهنك؟

إذاً هذا جيّد -- فأنت لا تعرف ما العمل. أحد التحديات الأساسية التي نحاول معالجتها هو ماذا نفعل عندما لا نعرف ما العمل.

الآن ما جرّبت فعله هو أنّك قلت، حسناً هل أستطيع استخدام الطريقة التي طبّقناها لإيجاد الجذر التربيعي للعدد ٢. هل يمكنك استخدامها في هذه الحالة.

وهكذا قلت، حسناً فلنفترض أنّ العدد يساوي **a** على **b**. ولديك تلك المعادلة وقلت، ماذا يعني وجود هذه المعادلة هنا.

الخطوة التالية في هذه الاستراتيجية هي أن تقول، ماذا يصحّ أيضاً إن كان ذلك صحيحاً. هل تستطيع التفكير بأي أمر يصحّ إن كان **b** ضعف ٠،٣٣٣ إلى ما لانهاية يساوي **a** ماذا قد يصحّ أيضاً؟

الأسبوع الثالث:	الأعداد – الأعداد غير النسبية
المحاضرة ٣. ٧:	الثلث بصيغة عشرية
الموضوع ٤:	تحويل العدد ٠،٣٣٣ إلى عدد نسبي

إذاً عند التفكير بكيفية دراسة أمر ما، أنصحك بصبّ اهتمامك على ميزة الغرض الأبرز. بعبارات أخرى، عندما كنّا نتحدّث عن الجذر التربيعي للعدد ٢، الأمر المميّز هو أنّه، عند ضرب العدد بنفسه، تحصل على الرقم ٢.

صح.

إذاً عند النظر إلى العدد ٠،٣٣٣٣ إلى ما لانهاية، ما الميزة الأبرز بالنسبة إليك؟

الرقم ٣ المكرّر على ما أعتقد.

ماذا عن الرقم ٣ المكرّر.

إنّه مكرّر إلى ما لانهاية.

إنه مكرّر إلى ما لانهاية. صحّ تماماً.

إنّ الرقم ٣ مكرّر إلى ما لانهاية. ذلك، بالنسبة إلي، يبدو كأنّه السمة المميّزة لهذا الرقم. ٠،٣٣٣٣٣. الرقم ٣ مكرّر إلى ما لانهاية.

صح.

إذاً، يبدو لي أنّه يوجد أمر متعلّق بتكرار الرقم ٣ إلى ما لانهاية؟ حسناً، عندما تكرّر الرقم ٩ إلى ما لانهاية، كان يساوي ١. لماذا؟

حسناً، لأنّنا عندما ضربنا العدد ٠،٩٩٩ بـ١٠، وطرحنا العدد النسبي، الذي يساوي ١، تبيّن لنا أنّ العدد ٩× يساوي ٩. إذاً إن طبّقنا هذا هنا، يمكننا القول إنّ × تساوي ٠،٣٣٣٣ إلى ما لانهاية. ١٠× تساوي ٣،٣٣ إلى ما لانهاية. وإذا طرحنا × من ١٠×، يتبيّن لنا أنّ ٩× يساوي ٣. إذاً × تساوي ٣ على ٩، أو ٣/١. حسناً، فماذا ردّ فعلك هنا؟

أشعر بالسعادة فحسب لأنّني انتهيت.

بالضبط.

بالضبط.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٧:	**الثلث بصيغة عشرية**
الموضوع ٥:	**التفكير بسبب نجاح الحلّ**

الآن أعِد التفكير بالأمر. لمَ ضرب العدد بـ١٠ -- بماذا أفادك فعلاً؟

حسناً، أرتاح أكثر بكثير للأعداد الطبيعية، وضرب العدد بـ١٠ أضاف العدد ٣ محل العدد ١.
حسناً.

مثلما درسنا العدد ٠,٩٩ للمحاولة، عندما طرحنا × من ١٠×، حصلنا على **عدد طبيعي**.

لماذا، لمَ حصلت على عدد طبيعي. لمَ كان الطرح سهلاً؟

حسناً، بمجرّد وجود عدد لامتناهٍ من الرقم ٣، بعد الفاصلة يعني أنّه مهما نقلناه إلى الجهة الأخرى من الفاصلة بضرب ١٠ أو ١٠٠ أو ١٠٠٠ سنحصل دائماً على عدد لامتناهٍ من الرقم ٣ بعد الفاصلة.

إذاً لماذا يجعل ذلك الطرح سهلاً؟

حسناً، 0,333 إلى ما لانهاية ناقص ٠,٣٣٣ إلى ما لانهاية يساوي ٠.
صح صح، نعم.

إذاً تساويا -- إذا كنت تطرح وإذا كنت -- إذا كنت تحل مسألة طرحنا وتساوى الرقمان في الأعلى والأسفل يصبح الطرح سهلاً جداً.
صحيح.
صحيح. لأنّ الإجابة تكون صفر. مفهوم؟

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٧:	**الثلث بصيغة عشرية**
الموضوع ٦:	**توسيع الأفكار**

إذاً على فكرة، أحد أهمّ الأمور التي يمكنك تعلّمها لكي تكون ناجحاً هو عندما تتعلّم أمراً ما، عندما يكون لديك فكرة، عندما تُحرز تقدّماً، لا تتوقّف وتقول، نعم الآن أستطيع حل هذه المسألة، لقد انتهيت. بل عندها تفكّر بالمسألة وتقول، مهلاً لحظة، ما الفكرة التي تعلّمتها؟ هل أستطيع استخدامها في مكان آخر؟ هل أستطيع توسيع تلك الفكرة؟ هل أستطيع إيجاد مكان ما تنطبق عليه؟

فكّر بالأمر جدياً، وفكّر بالمناقشة التي أجريناها للتوّ.

ما كانت الفائدة من ضرب العدد بالرقم ١٠ وطرحه؟

حسناً، لأنّ لديك العدد ٠،٣٣٣ إلى ما لانهاية، 0,333 إلى ما لانهاية، وكان من الأسهل الطرح لأنّهما متساويان في الأعلى والأسفل، فعند الطرح حصلنا على صفر لكل شيء تقريباً ما عدا أمرا واحدا صغير. إذاً بعبارات أخرى، تتخلّص من هذا العدد اللامتناهي من الأمور، كل ما تلاشى، الـ٠،٣٣ التي تلاشت، ويبقى لديك كمية صغيرة كان عليك التعامل معها. صحيح؟

بقي لديك ثلاثة، ٩× يساوي ٣. عندما كان لديك ١٠× ناقص ×، حصلت على ٩× يساوي ٣، صح؟ الآن، طبّق هذه العادة بالتفكير، ما إن تتوصّل إلى فكرة ما، ما إن تلاحظ أمراً ما، عندها تعمل على حل المسألة.

كان لدي مرشد عندما كنت أستاذاً مبتدئاً، هنا في جامعة تكساس. كان لدي مرشد اسمه ر.ه. بينج، وكان لامعاً جداً في مجال الرياضيات وكان عضواً في الأكاديمية الوطنية للعلوم وأثبت الكثير من نظرياتها. وكان يجيد فعلاً العمل على النظريات وإثبات الأمور الجديدة والتوصّل إلى أفكار جديدة. وإحدى عاداته كانت، وكان يقول لي أن أفعل ذلك، كان يقول إنّ الوقت المناسب للتفكير بمسألة ما هو بعد إيجاد حل لها. أليس ذلك بالأمر الغريب؟

الوقت المناسب للتفكير بمسألة ما هو بعد إيجاد حل لها. وما يعنيه هو التالي، كما رأيت الآن كيف تحلّ تلك المسألة، رأيت كيف تغيّر العدد ٠،٣٣٣٣ إلى ما لانهاية إلى ١/٣.

الآن، ما يعينه بهذا القول، أنّ الوقت المناسب للتفكير بمسألة ما بعد إيجاد حل لها، هو أن تقول، حسناً، فهمت لمَ أستطيع تدوين العدد ٠،٣٣٣ إلى ما لانهاية وتحويله إلى **عدد نسبي** التفكير به الآن يعني النظر إلى الفكرة التي توصّلت إليها والتفكير جدياً بها والقول، أي مشاكل أخرى يمكن أيضاً حلّها بهذه الفكرة؟

أو يجوز توسيع تلك الفكرة وجعلها تنطبق على مسائل أكثر تعقيداً؟

إذاً أول أمر عليك القيام به بعد حل المسألة هو أن تسأل نفسك ما الفكرة التي أعرفها والتي أستطيع الآن أن أطبّقها على أمر يتعدّى ما كنت أقوم به في بادئ الأمر.

أنت تعلّمت أمراً ما، لكنّك تعلّمت أكثر من أن تحلّ تلك المسألة فحسب، إذا كلّفت نفسك عناء التفكير بها. إذاً هذا ما أطلب منك أن تقوم به الآن.

خذ الفكرة واستخدمها حيث تنطبق.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٨:	**من الأعداد العشرية إلى الأعداد النسبية**
الموضوع ١:	**خطوة صغيرة**

حسناً. إذاً هيّا جرّب ما إذا كان هناك **عدد عشري** آخر يمكنك تحويله إلى **عدد نسبي**. وعلى فكرة، لا تستعجل وتقل أريد أن أحلّ أكبر عدد عام ممكن. أريدك ألا تستعجل أبداً، بل أن تتأنى في الحلّ. تأنَّ في الحلّ.

بعبارة أخرى، خذ أبسط عدد آخر يخطر في بالك وجرّب تحويله إلى عدد عشري. والسبب أنّه إذا تمكّن مارشال من فعل ذلك حقاً، فما سيفعله هو أنّه سيعلّم نفسه كيف يقوم بأمر لم يسبق له أن نفّذه من قبل.
حسناً.
إذاً هذا هو الهدف.
طيّب.

وهذا أشبه بالسحر، لأنّك في غضون دقائق معدودة ستقول، انتظر، أستطيع القيام بتلك الخطوة المقبلة. أستطيع القيام بخطوة أخرى. أستطيع القيام بخطوة أخرى. وبسرعة ستتمكّن من تحقيق الكثير. إذاً هيّا جرّب مسألة أخرى تستطيع حلّها.

طيّب، كنت أفكّر بالعدد ٠،١١١١١ إلى ما لا نهاية.
جيّد. هيّا.
إذاً، باتّباع الاستراتيجية ذاتها، × يساوي ٠،١١١ إلى ما لانهاية.

هيّا وضع بالأعلى، على فكرة، العدد ١٠×، لأنّك في العادة تطرح العدد الأكبر في الأعلى.
طبعاً.

خذ العدد ١٠× وذلك يساوي ١،١١١١ إلى ما لانهاية. وعند طرح ذلك، تحصل على ٩× يساوي ١.
إذاً × يساوي ١ على ٩.
صح.
جيد جداً.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣.٨:	**من الأعداد العشرية إلى الأعداد النسبية**
الموضوع ٢:	**خطوة صغيرة أخرى**

الآن، حسناً، نجحت في معالجة تلك المسألة. أخبرني بعض الأعداد الأخرى التي تعرف حلّها، وربما، لن نقوم بتدوينها.

إذا أخذنا واحد فاصلة، عفواً إذا أخذنا ٠،١٠١٠١٠ إلى ما لانهاية. ماذا يحصل عندها؟

بدلاً من ضرب العدد بـ١٠، نضربه بـ١٠٠.

حسناً، إذاً أنت تستبق الأمور الآن. هذا رائع، هيّا. هيّا، ابدأ.

إذاً لدينا العدد × يساوي ٠،١٠١٠١٠ ويتكرّر العدد ١٠ إلى ما لانهاية. وعند ضربه بـ١٠٠، نحصل على العدد ١٠،١٠١٠١٠ إلى ما لانهاية. وعند طرح العددين، تبقى الأعداد العشرية ذاتها لأنّنا نكرّر هذا النسق المؤلّف من عددين. ونحصل على ٩٩× يساوي ١٠ أو × يساوي ١٠/٩٩.

حسناً.

طيّب. جيّد. لمَ لا تصف لي الآن مجموعة **الأعداد العشرية** التي تظنّ أنّك تستطيع حلّها.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣.٨:	**من الأعداد العشرية إلى الأعداد النسبية**
الموضوع ٣:	**حل المسألة العالقة**

إذاً يمكنك تدوين عدد يشمل عدداً متكرّراً بعد الفاصلة، غير الأعداد التي ذكرتها لي.
إذا لخّصنا كل عدد.
إذاً، هيّا بنا. إليك العدد واحد.
حسناً.
إذاً ارسم الأعداد على سطر الأعداد.
طيّب.
هل هذا سطر الأعداد بأكمله؟
كلا.
لماذا إذاً؟ أتعرف أنت متحيّز جداً باختيارك للأعداد على سطر الأعداد.

سطر الأعداد طويل جداً. لا يريحني أن أدوّن أي عدد. أعني أنّ الورقة عريضة جداً. سأرى ما إذا كنت أستطيع أن أرسم، حسناً.
ارسم سطر الأعداد مجدداً لتستفيد من مساحة أكبر. جيّد، أرسم واحداً أينما كان. حسناً، ما رأيك أن ترسمه هنا.
إذاً الأعداد ٢ هنا.
جيّد.
الأعداد ٣ هنا.
نعم، دعني أسألك، أي الأعداد تستطيع حلّها؟

كل **الأعداد الكسرية**. أي أعداد عشرية، على أي أعداد عشرية تنطبق طريقتك؟ وأسألك، هل من أعداد أخرى غير الأعداد التي وصفتها حتّى الآن. أين موقع الأعداد التي وصفتها حتّى الآن على سطر الأعداد؟
بين صفر وواحد.

هل من أعداد لا تتراوح بين صفر و١؟
نعم، حسناً، أعطني عدداً.
وهل تستطيع حلّه كما تحلّ هذه الأعداد أم لا؟
إذاً إن كان لدينا ٥,٣٣٣٣ مثلاً. نستطيع أن نحوّله إلى عدد نسبي.

رائع. حوّله. الآن، حسناً، المغزى هو، وهذا من أصعب الأمور في الحياة. تصل إلى طريق مسدود، وفي هذه الحالة كنت تنظر بين صفر وواحد. ولم يخطر في بالك أبداً أن تفكّر بعدد غير الأعداد التي تتراوح بين ٠ و ١.

إذاً أقول، أحد الأمور المجزية جداً أن تحاول أن تجبر نفسك، ولا أحد منّا يستطيع أن يقوم بذلك بانتظام، نحن جميعنا نتقيّد بتفكيرنا. وإذا أجبرنا نفسنا على عدم التقيّد، وعلى النظر أبعد من خيالنا، قبل أن نبدأ بالتفكير حتّى، نبدأ من نقطة الصفر. صح؟

لم تتخيّل حتّى ما يوجد عند الناحية الأخرى من الفاصلة. ومع ذلك إذا نظرت إلى سطر الأعداد وقلت، حسناً، أين هي النقاط التي أفكّر فيها؟

حسناً، إنّها جميعها بين صفر وواحد.

حتّى أنّك رسمتها هكذا، صفر واحد. كان الأمر برمّته، حاصل تفكيرك. إذاً على فكرة، لا توجد صيغة تحدّد كيف تخرج من الطريق المسدود، وكيف نتخلّص من ضيق الأفق الذي نعاني منه جميعاً. لكنّ ذلك يستحقّ المحاولة لا شكّ، وعندما تعمل على ذلك وتقول توجد طرق لأوسّع آفاق نظري، فذلك يجدي فعلاً وكأنّه سحر.

إذاً هنا نحن نحلّ مسألة رياضية لا أكثر، لكن في الحياة أبعد من الرياضيات تلقى نتائج مجدية جداً. لكننا جميعنا نفكّر أنّ أول أمر سنقوم به، وعلى فكرة أعني ذلك تحديداً في الحياة الحقيقية. نشهد ذلك في أمور كالمناقشات السياسية والمناقشات الدينية. تبدأ بانحيازك وتحيط نفسك بأشخاص يفكّرون تماماً مثلك أنت، وتفكّر أنّ هذا هو الحال في العالم لأنّ الجميع حولك يقول الأمر عينه. ثمّ تتمهّل وتقول حسناً، ما الذي أفترضه هنا فعلاً؟ هل أنا أفتح ذهني فعلاً أم أنّني أكرّر ما أفكّر به في قرارة نفسي مراراً وتكراراً؟

إذاً هذا مثال رائع، فهيّا حاول إيجاد حل لهذا العدد الذي اخترته، 5,3333 وجرّب حلّه.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٨:	**من الأعداد العشرية إلى الأعداد النسبية**
الموضوع ٤:	**الأعداد الأكبر من ١**

حسناً. حسناً، إذاً كان لدينا × يساوي ٥٫٣٣٣٣ إلى ما لانهاية، نستطيع ضربه بـ١٠ ونحصل على ٥٣٫٣٣٣ إلى ما لانهاية، وعندما نطرح × من ١٠×، تختفي الفاصلة ويبقى لدينا ٥٣ ناقص ٥، ما يساوي ٤٨. هذا يساوي ٩×.

إذاً × يساوي ٤٨/٩.
جيد جداً.

حسناً. إذاً الآن أي أعداد أخرى تستطيع حلّها؟

حسناً، أي عدد يشمل عدداً يتكرّر بعد الفاصلة. لا يهمّ ما هي الأعداد بعد الفاصلة.
طيّب.

ماذا عن الأعداد السالبة؟
طبعاً.

الأمر ذاته؟

حسناً. جيد جداً.
جيد جداً.
إذاً الآن وسّعت درسك.

حسناً، الآن هل تستطيع توسيعه أكثر؟

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٨:	**من الأعداد العشرية إلى الأعداد النسبية**
الموضوع ٥:	**توسيع نطاق النجاح**

إذاً عالجت أولاً الأعداد التي تبدأ عند الفاصلة -- الأعداد الأولى التي عالجتها كانت ٠،٣٣٣ إلى ما لانهاية، رأيت كيف تحوّلها. وبعدها رأيت أنّك تستطيع حل الأعداد ٠،١١١١ إلى ما لانهاية أو ٢ أو ٣ أو ٤. وبعدها قلت، أستطيع حتّى حل العدد ٠،١٠١٠١٠٠ المؤلّف من عددين إلى ما لانهاية واستطعت أن تفعل ذلك. وفكّرت، أستطيع تحويل أي عدد إذا تكرّر ٠،١٢٣١٢٣١٢٣١٢٣ إلى ما لانهاية.

أستطيع حلّ ذلك.
إذاً عالجت كل هذه الأعداد. وعندها قلت، حسناً أستطيع حل العدد ٥،١٢٣١٢٣١٢٣.
صح.
جيّد. والآن فعلت أمراً آخر، قلت، أستطيع حلّ العدد ١،١٠٠٠٠
صح.

والآن تستطيع حلّ أي عدد آخر؟ إذاً هدفك أن تدفع نفسك دائماً، هل أستطيع حل فئة جديدة من الأعداد؟ إذاً تستطيع حل العدد ١،٥٣٣٣٣٣ مثلاً. حاول.
طيّب.

× يساوي ١،٥٣٣٣ إلى ما لانهاية، عندها ١٠× يساوي ١٥،٣٣٣ إلى ما لانهاية. و١٠× ناقص ×.
لمَ لا تحاول تدوينه بترتيب أو تدوين ما يساوي العدد ١٠× وبعدها رتّب الفاصلتَين فوق بعضهما البعض، تأكّد من أنّ الطرح صحيح.

إذاً سنحصل على الأصفار من أعداد الـ٣.
هذا جيّد.
نعم، الأصفار جيّدة.
إذا نحصل على --
يساوي ماذا؟

٩× -- ٩×-- يساوي ١٣،٨، لذا × يساوي ١٣،٨ على ٩ أو ١٣٨ على ٩٠.
جيّد.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٨:	**من الأعداد العشرية إلى الأعداد النسبية**
الموضوع ٦:	**تحويل الأعداد العشرية إلى الأعداد النسبية – ارتكاب خطأ**

إذاً أخبرني أكبر فئة من الأمور التي تظنّ الآن أنّك تستطيع حلّها. كيف تصفها؟
إنه أي عدد يتكرّر فيه العدد بعد الفاصلة إلى ما لانهاية.
حسناً. وماذا عن الأعداد قبل الفاصلة؟

لا يهمّ الأمر.
لا يهمّ الأمر. طيّب، فلنجرّب بعد عدداً واحداً فقط لنتأكّد من أنّ ذلك واضح. أعني أنّ هذه الأمثلة التي أعطيتها شملت عدداً واحداً فقط، لكن قبل أن تبدأ بهذا الأمر. أقصد كخاتمة للموضوع، لنحلّ عدداً مختلفاً بعض الشيء عمّا سبق، فقط لنفهم الأمر بشكل أوضح.

حسناً.
اكتب بخط كبير لكي تستطيع فلنفترض أنّ × يساوي ٢٣,٥٤٦.
١٢١٢١٢ إلى ما لانهاية.
ممتاز.
جميل.

يتوجبّ علينا ضرب هذا العدد بـ١٠٠٠. و١٠٠٠× يساوي ٢٣٥٤٦,١٢١٢١٢ إلى ما لانهاية. ونطرح.
-- فلنضرب العدد بـ١٠٠٠٠ عوضاً عن ذلك.
الآن، بماذا ستضرب العدد؟
عشرة.
لماذا؟
هذا ما كنّا نفعله.

لنرَى، لكن أعني انظر إلى السؤال، ماذا حصل هنا؟
لمَ لم يساوِ ١٠٠٠× لمَ لم يكن ذلك خياراً صائباً؟
لم تتساوَ الأعداد ١٢١٢١٢ المتكرّرة.
لم تتساوَ؟
نعم.
جيّد.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٨:	**من الأعداد العشرية إلى الأعداد النسبية**
الموضوع ٧:	**تحويل الأعداد العشرية إلى الأعداد النسبية – النجاح**

الأستاذ: رجاءً أخبرني مجدداً ما الهدف من – ربما عليّ أن أعيد صياغة الجملة. صِف لي عملية أخذ عدد عشري وتحويله إلى عدد نسبي أنت تحاول حلّه الآن.

الطالب: إن بدأنا بعدد عشري، وضربناه بـ١٠ أو ١٠٠ أو ١٠٠٠.

الأستاذ: ممتاز.

الطالب: ثمّ نطرح × من العدد، على أمل أن يكون العدد بعد الفاصلة هو عينه في العددين، وعندها نطرح العددين، فتصبح الإجابة ٠.

الأستاذ: جميل. بالتالي، عندما طبّقت ذلك على هذا المثل، لمَ فشلت؟ ما الخطأ الذي ارتكبته؟

الطالب: عندما رتّبنا الفواصل، زالت الأعداد المتكرّرة، ١ و٢ و١ و٢، فتراصفت الأعداد ١ مع الأعداد ٢، وتراصفت الأعداد ٢ مع الأعداد ١. عند الطرح، لم يعد العدد ٠.

الأستاذ: جيد جداً. العدد الذي بدأت به كان ٢٣,٥٤٦١٢١٢١٢١٢.

الطالب: صح.

الأستاذ: أخبرني لمَ اخترت أن نضرب العدد بـ١٠٠٠؟ وقد أخطأت على فكرة.

الطالب: نعم. هكذا أصبحت كل الأعداد غير المتكرّرة قبل الفاصلة.

الأستاذ: نعم. حسناً. ولم يكن هذا هدفنا الحقيقي.

الطالب: صح.

الأستاذ: صح. حسناً. إذاً لنحلّ الآن المسألة ذاتها بالعدد × نفسه. أي عدد يفيدك أن نضرب العدد به؟ لنرى، هيّا أكمل حلّ المسألة. هذا رائع لأنّك تعلّمت ما الهدف الحقيقي من الضرب. لم يكن الهدف نقل الفاصلة لتحريك الأعداد غير المتكرّرة إلى الجهة اليسرى من الفاصلة. لم يكن هذا الهدف. هذا ما جرّبته. لكن لم يكن ذلك الهدف فعلاً.

الطالب: بما أنّ الأعداد ١٢١٢١٢١ تتكرّر، ولا يوجد إلا عددان نريد فقط أن ننقل الفاصلة بعد العدد اثنين، بضرب العدد بـ١٠٠.

الأستاذ: حسناً.

الطالب: أي أن ١٠٠× يساوي ٢٣٥٤,٦١٢١٢١٢ ونطرح منه ×، فيساوي ٢٣,٥٤٦١٢١٢١٢. الآن أصبح العددان متساويين.

الأستاذ: ممتاز.

الطالب: ونحصل على الأصفار في النهاية. ويبقى لنا العدد ٩٩× الذي يساوي ٢٣٣١,٠٦٦٠٠٠٠٠ إلى ما لانهاية. يساوي × بالتالي ٢٣٣١,٠٦٦ قسمة ٩٩ أو ٢٣٣١٠٦٦ قسمة ٩٩٠٠٠.

الأستاذ: جيد جداً. جيد جداً.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣.٨:	**من الأعداد العشرية إلى الأعداد النسبية**
الموضوع ٨:	**تلخيص النجاح**

طيّب، ماذا أنجزت الآن؟ ماذا تستطيع أن تقول الآن عن الأعداد العشرية التي تُعتبر كسرية فعلاً؟
يشمل آخر العدد دائماً نسقاً متكرّراً. هل هذا يكفي؟

إن كان لديك عدداً عشرياً لا يشمل نسقاً متكرّراً في آخره، أيكفي ذلك لتعرف إن كان عدداً كسرياً؟
نعم، لأنّنا نستطيع دائماً أن نضربه بحسب عدد الأرقام في النسق المتكرّر.

اضرب العدد بـ١٠ للحصول على هذا التأثير. وبذلك ينتقل العدد برمّته بحيث يتراصف آخر النسق المتكرّر مع عدد × الأصلي. ثمّ عندما نطرح ×، نحصل على أصفار متكرّرة في آخر العدد. وهكذا يبقى لدينا عدد مع عدد محدود من الفواصل المقسومة بـ بعض التسعات.
وكم -- بعض التسعات.
نعم.

صح. عندها، نستطيع تحويله إلى عدد كسري طبيعي بنقل الفاصلة، عبر ضربه ببعض قوى العشرة. في الأعلى والأسفل.
صح.
تنقل الفاصلة.
حسناً.
رائع. ألَم يكن ذلك رائعاً؟
هذا رائع.

تشعر فعلاً أنّك حقّقت إنجازاً. وعلى فكرة، لقد حقّقت إنجازاً بالفعل. أثبتت فعلاً كيف تعالج عدداً عشرياً ينتهي بنسق متسلسل، ورأيت كل ميزاته. وليس تكرار الأرقام بعد الفاصلة فحسب. وعرفت لماذا تستطيع حلّ الأعداد، حتّى لو غيّرت الفاصلة موقعها.
مذهل.

هذا رائع فعلاً.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٩:	**اكتشاف القسمة لوحدك**
الموضوع ١:	**تحويل الأعداد النسبية إلى أعداد عشرية**

كان هدفنا أن تقول أي الأعداد العشرية هي أعداد نسبية, وأيّها ليست نسبية.

صح.

فلننظر إلى المسألة الآن من ناحية أخرى. مثلا فلنفترض أننا نعالج عدداً نسبيّا.

أي عدد صحيح مقسوم على عدد صحيح.
حسنا.
طيّب.

ماذا نستطيع أن نقول عن العدد العشري الذي تحصل عليه إذا حوّلته إلى عدد عشري؟

أقول إنه يوجد نسق متكرّر في مرحلة ما.
رائع.
إذا غصت عميقا في العدد العشري, تجد نسقا من الأعداد المتكرّرة مرارا وتكرارا.
صح.

هيّا لنكتشف السبب وراء صحة ذلك. وعلى فكرة, سأعطيك تلميحا. إنه حقيقي!
حسنا.
حسنا.
لكن لنر ما السبب.
إذا أخذت عددين فقط

إذا أخذت عدداً نسبيّا, عدد صحيح قسمة عدد صحيح وقمت بتحويله إلى عدد عشري, لمَ تحصل على نسق متكرّر حتماً؟

كيف تعالج هذه المسألة؟

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٩:	**اكتشاف القسمة لوحدك**
الموضوع ٢:	**أسئلة محدّدة وبسيطة لاكتساب المعرفة**

ما رأيك أن نبدأ بمثال.

بالضبط.

هذا صحيح تماماً. من الرائع أنّك قلت ذلك، لأنّك بهدف اكتساب المعرفة، إحدى الطرق الرائعة لاكتساب المعرفة هي معالجة مثال محدّد. عوضاً عن التفكير بعموميات هذا العدد وذاك، وإذا لم يخطر ببالك عدد محدد، بإمكانك أن تأخذ عددين بسيطين، وعلى فكرة، ابدأ دائماً بالأعداد البسيطة، لا تبدأ بأعداد معقّدة، لا تأخذ إلا عددين بسيطين. وانتبه لما سيحدث. هيّا. اختر رقمَين بسيطين واكتشف النتيجة.

حسناً.

لنأخذ العدد ٥ على ٦.

٥ على ٦، ممتاز.

حسناً.

كيف تحوّل ٥ على ٦ إلى عدد عشري؟

يمكننا أن نستخدم القسمة المطوّلة.

ممتاز. وعلى فكرة، عالج المسألة بالكثير من الترتيب. السؤال الذي يطرح نفسه الآن هو، هل تتذكّر كيف تحلّ القسمة المطوّلة؟ هذا هو سؤالنا التالي. إذاً الخطوة التالية هي إخراج الآلة الحاسبة، صح؟

نعم، الخطوة التالية هي إخراج الآلة الحاسبة.

كلا، الخطوة التالي ليست إخراج الآلة الحاسبة. الخطوة الثانية هي حل المسألة. هيّا.

قابلية قسمة ٦ على ٥ هي صفر.

حسناً.

هذا هو العدد العشري.

صح.

لا يتغيّر مكان الـ٦.

ولآن سنسأل كم مرة يمكن تقسيم الرقم ٦ على ٥٠. والإجابة ٨.

نعم.

أنا سأتحقّق من نتيجة القسمة على ٦.

هذا صحيح نعم، ٨ إجابة صائبة. ويساوي ذلك ٤٨، صح؟

صح.

جميل.

لكن أين الـ٨؟ لم تدوّن الـ٨.

جيد جداً.

حسناً.

حسناً. والآن اطرح ٤٨ من ٥٠، فتكون النتيجة ٢.

٢ حسناً.

٦، كلا، أنزِل الصفر.
أنزِل الصفر.
سأفعل.
حسناً. على فكرة، لنحافظ على الترتيب. لنضع سطراً تحته لنعرف أي صفر أنزلناه.
حسناً.
تُقسم الـ٦ على ٢٨ ٣ مرّات.
حسناً.
دوّن ٣، ثمّ ١٨.
ممتاز.
عند الطرح، نحصل على ٢.
أنزِل ٠. لدينا ٢٠ مجدداً. ماذا يعني لك ذلك؟
سيبقى لدينا ٢٠ طيلة
الوقت الذي نحلّ فيه قسمة مطوّلة.
جيد جداً.
حسناً.
إذاً هيا، أخبرني ما الإجابة.
تساوي ٣ دائماً.
جيد جداً.
جيد جداً. حسناً.
ممتاز، ممتاز.
الآن، بما أنّ ذلك العدد انتهى بثلاثات. أي ٣، ٣، ٣، ٣، ما رأيك بأن تحل العدد ١١/٧؟
بالتأكيد

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٩:	**اكتشاف القسمة لوحدك**
الموضوع ٣:	**فكرة متكررة**

جيد جداً، وفي الواقع العدد ١١/٧ هو -- ينتهي بهذا النسق المتكرّر. الآن تستطيع أن تخبرني لِمَ سينتهي أي عدد نسبي بنمط متكرّر في النهاية.

العدد النسبي -- أو العدد الكسري بحسب تعريفنا له هو عدد طبيعي يقسم على عدد طبيعي.
نعم، أو قد يكون ناقص ١.

إذاً إنّه عدد صحيح قسمة عدد صحيح، لكن لا بأس. والعدد الصحيح ينتهي دائماً بـ٠٠٠٠٠،٠.
نعم.

ولكن، لا يوجد إلا ١٠ أعداد مؤلّفة من عدد واحد.

عندما نطرح حصيلة – لا أعرف ما أسمّيه -- إذاً إن قسمنا ب على أ، نضربa، بعدد ندوّنه في الأعلى، ثمّ نأخذ العدد المتبقّي، وننقل الفاصلة، ونحتسب كم مرّة يمكن تقسيم **a** على ذلك العدد. إذاً يجب أن تكون الحصيلة المتبقّية أقل من **a**.

صحيح. لأنّك عوضاً عن ذلك، تستطيع أن تضيف -- وإلا، مرة أخرى.
صح.

صح. إذاً هناك عدد محدود من الأعداد المتبقّية المختلفة بما أنّ **a** محدود. وعندما نصل إلى هذا النسق المتكرّر من الأصفار، العدد الجديد الذي سننزله سيكون دائماً ٠.

هكذا، في النهاية سيرسو على عدد رأيناه من قبل، ومن هناك يتكرّر.
ممتاز.
ممتاز. إذاً في الواقع، لنفترض أنّني أعطيت العدد ٤٧ قسمة ١٢٨. كم الطول الأقصى للقسم المتكرّر في آخره؟

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ٩:	**اكتشاف القسمة لوحدك**
الموضوع ٤:	**القصّة الكاملة للأعداد العشرية والأعداد الكسرية (النسبية)**

دعني أدوّن هذه الأعداد، لكي تتذكّرها فقط. ٤٧ قسمة ١٢٨. وهنا السؤال هو، إذا فعلت هذا، إنْ غيّرته إلى عدد عشري، ما الحجم الأقصى للكتلة المتكرّرة؟

صح.

ولمَ؟

حتماً ليست أكبر من ١٢٨. هذا كل ما أسأله.

لماذا؟ لمَ أنت متأكّد أنّها لا تفوق ١٢٨؟

كما كنت أقول، يجب أن يكون العدد المتبقّي أقل من ١٢٨.

حسناً، حسناً.

أظنّ أنّه قد يكون ٠، لكن عندها لن يتكرّر -- عندها يكون الحاصل أصفاراً.

في هذه الحالة، أعتقد أنّك محقّ.

هذا أقل من ١٢٠.

ربما أقل من ١٢٧. لكن الفكرة هي أنّك على حقّ تماماً. لأنّك رأيت أنّ الأعداد المتبقّية ستكون دائماً أقل من ١٢٨، تعرف أنّك ستكرّر العدد المتبقّي إذا كرّرت المسألة ١٢٠ مرة. تعرف أنّك ستكرّرها. أو تكرّرها ١٢٩ مرة، ستكرّر واحدة حتماً، صح؟

جيد جداً. إنّ ما نعنيه هو أنّ كل عدد نسبي، كل عدد كسري، عند تحويله إلى عدد عشري، يتكرّر في نهاية المطاف. وفي النهاية يتكرّر النمط. وإذا شمل العدد العشري نمطاً متكرّراً، يمكن كتابته كعدد نسبي.

يمكن كتابته كعدد نسبي.

هكذا، أصبحت الآن تعرف القصة برمّتها عن الصلة بين الأعداد الحقيقية، والأعداد العشرية، والأعداد الكسرية (النسبية) أي أعداد كسرية (نسبية)، وأيّها غير نسبية. مفهوم؟

نعم.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ١٠:	**القيام بخطوة إضافية**
الموضوع ١:	**مفاجأة في القسمة!**

الآن، أريد أن أفعل أمراً بعد قبل أن تتوقّف.

حسناً.

بعد التفكير ملياً بفكرة ما، كما فعلنا الآن، بعد التفكير بها ملياً، يستحيل ألا تتعلّم أكثر مما كنت تعرفه سابقاً.

دعني أطرح عليك بعض الأسئلة لكي أثبت لك أنّك فعلاً تعلّمت أكثر مما كنت تظنّ.

حسناً.

طيّب. إذاً أصبحت تعرف أنّ كل عدد نسبي يساوي عدداً عشرياً يشمل نمطاً متكرراً في آخره.

نعم.

وصرت تعرف لوحدك كيف تحوّل أي عدد عشري يشمل نمطاً متكرراً في آخره، وتحويله إلى عدد نسبي.

نعم.

صح؟

نعم.

إن قمت مثلاً بكتابة هذا العدد النسبي، ٤٧ على ١٢٨، وكتبته بصيغة عدد عشري. وكتبته، هذه هي الفكرة، مهما كان العدد. يمتدّ العدد، ويشمل كتلة متكرّرة. وتقوم بعملك.

لنفترض، أنّك بعد أن حوّلت هذا العدد النسبي إلى عدد عشري، فعلت العكس الآن. ستحوّل هذا العدد العشري إلى عدد نسبي.

حسناً.

نعم. أي عدد نسبي ستحوّله على فكرة؟

٤٧ على ١٢٨.

جيّد.

هذا ما سيساويه.

لكن في العملية التي تتبعها، كيف سيبدو العدد النسبي فعلاً؟ هل تتذكّر كيف حصلت على هذا العدد؟ كيف سيبدو هذا العدد النسبي؟

سيبدو كعدد ما، كعدد عشري لا يشمل الرقم ٨، أو عدد ينتهي بأصفار متكرّرة قسمة بعض التسعات.

نعم.

وبعد نقل الفاصلة في الأعلى، وهناك فعلاً عدد نسبي، أي عدد نسبي تحصل عليه؟ كيف يبدو؟

سيبدو مثل أي عدد كان قبل النسق المتكرّر.

إذاً كيف يبدو العدد النسبي؟

أريد بسط الكسر ومقام الكسر. بحسب ما تقوله، بسط الكسر يبدو كهذا الجزء، الجزء غير المتكرّر، وربما البعض هناك. إنّه بالتالي أمر يشمل نمطاً متكرّراً لا ندري به.

لكن ماذا عن مقام الكسر؟

إنّه بعض التسعات وبعض الأصفار.

صح.

صح؟
نعم. إذاً ماذا يساوي هذا العدد النسبي؟
رقماً ما قسمة بعض التسعات. بعض التسعات يليها بعض الأصفار.
وماذا يعني ذلك من ناحية تقسيم الأمور؟

أعني إذا كان هذا العدد النسبي يساوي ذلك، فهذا ملفت.
ماذا يقول لك ذلك عن العدد ١٢٨ وعن صلته بهذا الرقم؟
حسناً، ١٢٨ يقسم ذلك العدد.
بالضبط. أليس ذلك ملفتاً؟
بلى.

أي أنّ هذا يعني أنّ العدد ١٢٨ ينقسم إلى عدد يبدو ككتلة من التسعات تليها كتلة من الأصفار. وكذلك إن كتبت أي عدد نسبي، أليس كذلك؟

٣٥ قسمة ١٢٤٧. يساوي هذا عدداً مقسوماً على مجموعة من التسعات تليها كتلة من الأصفار. ثمّ العدد ١٢٤٧ ينقسم بالتساوي إلى كتلة من التسعات تليها كتلة من الأصفار. أليس ذلك ملفتاً؟ كل عدد ينقسم بالتساوي إلى عدد مؤلف من كتلة من التسعات وكتلة من الأصفار. أليس ذلك مفاجئاً؟
بلى.

نعم. هذه فكرة. أعني أنّ الناس لن يعتبروها نظرية. لكنها فكرة تستبصرها إذا حاولت بنفسك أن تثبت الأمر. لأنّك ترى هذه المعرفة العميقة، المعرفة المتعلّقة بالإثبات، لأنّك تفهم فعلاً كيف أثبتت البرهان. لذلك، يلفتني أن أجلس هنا وأستمع إلى حديثك، وأدرك أنّك ستخلق دائماً عدداً يكون فيه مقام الكسر كتلة من التسعات تليها كتلة من الأصفار، وأنّ كل عدد نسبي سيساوي ذلك، ما يعني أنّه يساوي ١٢٨ مرة القسم الذي سيزول. وبالتالي، هذا العدد يشمل ١٢٨ بالتساوي.

هذا ملفت.
نعم. إنّه ملفت.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ١٠:	**القيام بخطوة إضافية**
الموضوع ٢:	**الغريب قد يكون أمراً عادياً: أبق ذهنك مفتوحاً**

إذاً ما اكتشفناه هنا هو، أولاً، أنّه من الملفت من الناحية الرياضة أن نرى أنّنا نستطيع فعلاً أن نميّز الأعداد العشرية التي تُعتبر أعداداً كسرية، مقارنةً بتلك التي لا تُعتبر أعداداً كسرية.
هذا ملفت بحدّ ذاته. لكن المغزى من هذا التمرين كان أن تقول كيف تكتشف فكرة ما؟ كيف تجعلها أغنى وجدية أكثر؟ وهنا اكتشفنا فكرة الأعداد العشرية.

بدأنا بالأعداد الكاملة، وقلنا حسناً، قد يكون لدينا أعداد نسبية، هناك أعداد ليست أعداداً كسرية، مثل الجذر التربيعي للرقم ٢. ورأينا الآن نستطيع فعلاً أن نميّز الأعداد العشرية التي تُعتبر أعداداً نسبية، مقابل تلك التي لا تُعتبر كذلك.

الآن، أريد أن نفعل أمراً واحداً قبل أن نتوقّف، وهو هذا.
في المدرسة الابتدائية، تعلّمت أولاً عن الأعداد الكاملة الإيجابية، الأعداد الطبيعية، وتعلّمت كيف تضيفها، وتضربها، وتقسمها. ثمّ تعلّمت عن الأعداد النسبية. وأمضيت الكثير من الوقت في التعلّم عن الأعداد النسبية وتعاملت مع الأعداد النسبية. لم تواجه الأعداد غير النسبية كثيراً. كلا.

وفي الواقع، يصعب علينا جداً أن نبرهن أن ًعدداً ما غير نسبي. تذكّر الجذر التربيعي للرقم ٢، عالجناه وتبيّن لنا أنّه يوجد مبرّر وراء إمكانية إثبات أنّه غير كسري، بل أنّه غير نسبي. لكننا نرتاح أكثر بالتعامل مع الأعداد الكسرية. تبدو مألوفة أكثر، وأعداداً كاملة، إنّها مألوفة أكثر.
إذاً دعني أسألك هذا. إن اخترتَ عدداً عشرياً عشوائياً، ماذا يعني ذلك؟

ما أعنيه هو، فلنفترض أنّك، اخترت عدداً عشرياً بين صفر وواحد، لنختر عدداً بين صفر وواحد.
إذاً نبدأ بـ٠,٠. فقط ليكون لدينا أعداداً بعد الفاصلة.
قد تأخذ نرداً مؤلفاً من ١٠ أوجه، وتحرّكه وترميه، ويكون العدد ٠١٢-٣٤٥-٦٧٨٩ مدوّناً عليه، وأينما رسا النرد تدوّن العدد. فترميه، وتحصل على اثنين.
ترميه، علامَ تحصل؟
على أربعة.
ترميه مجدداً، علامَ تحصل؟
اثنان.
ترميه، علامَ تحصل؟
أربعة. خمسة.
ترميه، علامَ تحصل؟
واحد.
واحد. ترميه، علامَ تحصل؟

ستة.

ستة. ارمه.

صفر.

ارمه.

خمسة

خمسة. واحد.

أربعة.

ثمانية.

تسعة.

وهكذا دواليك.

هل سيكون هذا العدد كسرياً أم غير نسبي؟

غير نسبي.

غير نسبي. صح.

سيكون العدد العشوائي غير نسبي، لأنّ الطريقة الوحيدة ليكون نسبياً هو إن، في مرحلة ما، خلق كتلة من الأعداد ثمّ كرّر تلك الكتلة في كل مرة، كل صف بعد تلك النقطة كان متوقّعاً.

واحتمالات ذلك هي صفر.

قد يحدث ذلك، لأنّه يوجد أعداد كسرية، لكن تقريباً كل عدد حصلت عليه باختيار عدد عشوائي هو غير نسبي.

أنا أعتبر ذلك استعارة لأمور كثيرة.

بالنسبة إلى الأعداد الحقيقية، معظم الأعداد الحقيقية غير نسبية. ليست كسرية، علماً أنّ الأعداد الكسرية هي تلك التي ندرسها أكثر ونفكّر بها. معظم الأعداد العشرية غير نسبية.

إذا اخترنا عدداً عشوائياً، يكون غير نسبي، لا يكون كسرياً. وأنا أعتبر ذلك استعارة لنواحٍ حياتية كثيرة، في الواقع، لأنّك غالباً تكون مرتاحاً لبعض الأجواء، تعتاد على بعض الأمور. ثمّ ترى أمراً غريباً، قد تلتقي بأشخاص غرباء من ثقافة مختلفة أو بلد مختلف ويملكون اعتقاداً غريباً أو ما يشابه. وتقول لنفسك، هذا غريب ثمّ تدرك أنّ معظم العالم لديه مواقف وأنّك أنت الغريب. لأنك محاط ببعض الأشخاص الذين يشاركونك آراءك التي ترعرعت عليها، وأنت الغريب.

أنا أرى أنّ هذه الاستعارة حول الصفة غير النسبية لمعظم الأعداد العشرية هي أمر يشجّعنا جميعنا على الحفاظ على انفتاح الذهن، بأنّ الأمور التي اعتدت عليها وأنّ طريقة تفكيري وأنّ الأمور التي اعتدت على التفكير والإيمان بها وأن آرائي، قد لا تكون طبيعية في الواقع قد تكون غريبة جداً.

والحفاظ على انفتاح الذهن حول ما يقدّمه العالم فعلاً هو أحد الدروس المهمّة التي قد نتعلّمها ونستوعبها. إذاً هنا في عالم الرياضيات وبالحديث عن كتابة الصيغة العشرية للأعداد، وسّعنا مفهومنا لنتحدّث فعلاً عن انفتاح الذهن وعن رؤية العالم من منظور جديد أعتقد أنّها مغامرة رائعة، وآمل أن تستمتع بها أنت أيضاً.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ١١:	**لغز "حقيقة الأمر"**
الموضوع ١. ١:	**لغز "حقيقة الأمر"**

إليك لغزاً قصيراً حضّرناه لك. نأمل أن تتمكّن من إيجاد حلّ له خلال نهاية هذا الأسبوع. لدينا لغز قصير ويُسمّى "**حقيقة الأمر**".

يجب إطعام ١٠ حيوانات ٥٦ بسكويتة. تنقسم الحيوانات ما بين كلاب وقطط. يحصل كلّ كلب على ست قطع بسكويت، وكلّ قطّ على خمس قطع. ما عدد الكلاب الموجودة؟ حاول العثور على حلّ من دون اللجوء إلى الجبر.

هنا تكمن صعوبة الأمر. أظن أنك ستتمكّن من معرفة الإجابة.

لمعلوماتك، سنقدّم لك لاحقاً ألغاز أكثر صعوبة. أردنا فقط التأكّد من أنها مألوفة بالنسبة إليك.

نتطلّع شوقاً إلى ذلك.

نتطلّع شوقاً لسماع رأيك في حلقات المناقشة.

الأسبوع الثالث:	**الأعداد – الأعداد غير النسبية**
المحاضرة ٣. ١١:	**لغز "حقيقة الأمر"**
الموضوع ١. ٢:	**حقيقة الأمر- حلّ اللغز**

يشمل هذا اللغز القطط والكلاب وقطع البسكويت. سيبرهن أنه ثمة أكثر من طريقة لحل المسائل. ربما لا يجدر بي قول ذلك أمام كلّ تلك الحيوانات.
على كلّ حال، سنرى ردة فعل كولمن تجاه القطط والكلاب وقطع البسكويت. تفضّل بالكلام.

يُسمّى هذا اللغز "**حقيقة الأمر**". وينصّ على أنه يجب إطعام ١٠ حيوانات ٥٦ قطعة بسكويت. تنقسم الحيوانات ما بين كلاب وقطط. يحصل كلّ كلب على ٦ قطع بسكويت، وكلّ قطّ على ٥ قطع. كم هو عدد الكلاب؟

وثمّة إرشادات تابعة لهذا اللغز، وتنصّ على محاولة العثور على حلّ من دون اللجوء إلى الجبر، أي من دون اعتماد علم الجبر. ولا أظنّ أنّ ذلك سيشكّل مشكلة كبيرة بما أنني لا أجيد الجبر.

ولكن بدايةً، سأكتب الأمور التي أعرفها أي أنه ثمة ٥٦ قطعة بسكويت و١٠ حيوانات. يحصل كلّ كلب على ٥ قطع، أقصد ٦ قطع بسكويت، وكلّ قط على ٥ قطع.

إذاً لدي مجموع ٥٦ قطعة بسكويت و١٠ حيوانات، ويحصل كلّ كلب على ٦ قطع بسكويت وكلّ قط على ٥ قطع. لنتوقف هنا.

وعندما أقول في هذه الحال إننا سنتوقّف لبرهة، بالطبع عند فكرة الكلاب والقطط يكون لدينا كفوف عديدة. لكن على كلّ حال، ما فعله كولمن في هذه المرحلة هو طرح السؤال. كان واضحاً بشأن عدد قطع البسكويت التي سيحصل عليها كلّ كلب وكلّ قطّ، ومجموع قطع البسكويت، ومجموع عدد الكلاب والقطط. فأعاد صياغة السؤال.

يعتبر هذا دائماً خطوة جيدة. لنرى ما سيفعل هنا.

عندما أنظر إلى الأمر يبدو أنه يمكن أن نقول بسهولة إنه للحصول على ٥٠ قطعة بسكويت يمكن أن يكون لدينا ١٠ قطط. وللحصول على ٥٦ قطعة بسكويت، من الممكن أن نضيف كلباً واحداً. لأنّه مع ٥ قطع بسكويت لكلّ من القطط الـ١٠، نحصل على مجموع ٥٠ قطعة بسكويت والكلب سيكون الحيوان السادس الذي سيمكّننا من الحصول على مجموع ٥٦ قطعة بسكويت.

ولكن لدينا فقط ١٠ حيوانات. وإذا اعتبرنا أنه ثمة ١٠ قطط زائد كلب واحد أي ١١ حيواناً، لن يفلح ذلك أيضاً. بالتالي، ما أريد معرفة هو كيف بإمكاني الحصول على العدد ٦ المتبقّي؟

إذاً بإمكاننا تقسيم العدد ٥٦ إلى ٥٠ و٦. وإن كنت أعالج العدد ٦ فقط ما هي تركيبات الحيوانات التي بإمكاني اعتمادها لأحصل على العدد ٦ في هذا العمود؟

حسناً، هذا مثير للاهتمام. في هذه المرحلة، قرّر كولمن حلّ لغز مختلف. وأحب تلك الفكرة. فقال إنه لا يعرف كيف يجيب على هذا اللغز الذي أُعطي إياه، لكنه يعرف طريقة استخدام ٥٦ قطعة بسكويت.
بإمكاني الحصول على ١٠ قطط، أي ٥٠ قطعة بسكويت ثم أضيف كلباً.

أولاً، أحب فكرة أنه إن لم يكن بإمكانك حلّ لغز تقوم بأمر آخر. قم بحلّ لغز ذي صلة، وقد تتعلّم شيئاً منه. في هذه الحالة، تعلّم كولمن كيفية نقل العدد ٦ إلى العمود الأوّل من الجواب. كان ذلك مثيراً للاهتمام. اكتشف فكرة مثيرة جداً للاهتمام. وبالطبع، أدرك أنه ليس الجواب لأنه لديك ١١ حيواناً معنياً بدلاً من ١٠ كما تمّ وصفه في المسألة.

لذا استهلّ استكشافاً يتمحور حول كيفية نقل العدد ٦ إلى العمود الأوّل كمجموع عدد قطع البسكويت.
لنرى كيف يقوم بذلك. أعلم أنه لن يضمّ مجموعة من القطط لأنّ كلّ قط يتناول ٥ قطع بسكويت. لذا سيتمّ ضرب مجموع عددها بالعدد ٥. بإمكان القطط أن تعطي عدد ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، وهلم جراً. لن ينتج عنها عدد ينتهي بـ٦. لذلك سيكون العدد الأساسي هنا ناتجاً عن الكلاب.

إنّ كولمن يأخذنا الآن في دوّامة في ما يخصّ العمود الأوّل من العدد. إنها طريقة غريبة جداً لمعالجة هذه المسألة. وبصراحة، لم أرَ قط أحداً يعالج هذه المسألة بهذه الطريقة المحدّدة. فيسأل نفسه: "كيف ستتمكّن من الحصول على العدد ٦ في العمود الأوّل بعد إضافة عدد قطع البسكويت التي تتناولها القطط وتلك التي تتناولها الكلاب؟"

فيقول إنه مع وجود القطط فحسب، يحلّل بما أنّ كلّاً منها يتناول ٥ قطع بسكويت، أنه سيكون العدد الأخير إمّا ٠ أو ٥، لأنه إن جمعت ٥ عدداً معيّناً من المرات، ستحصل على عدد ينتهي بـ٥ أو ٠.
ويعلم ذلك، ويستخدم ذلك.

والآن، لم أكن لأعتمد تلك الطريقة لمعالجة هذه المسألة، وهذه ليست الطريقة التي يعتمدها معظم الناس. كيف عالجت المسألة؟

لا أظنّ أنها الاستراتيجية التي كنت لتعتمدها. لكن لنرَى ما فعله كولمن لحلّ هذه المسألة.

يتناول كلّ كلب ٦ قطع بسكويت، كما سبق أن ذكرنا. والعدد التالي من الكلاب التي تتناول عدداً من البسكويت ينتهي بـ٦

سيكون ٦ كلاب، أي ستتناول ٣٦ قطعة بسكويت. واستنتجت ذلك من فكرة تناول كلّ كلب ٦ قطع بسكويت، أي سيتناول كلبان ١٢ قطعة بسكويت، و٣ كلاب ١٨ قطعة بسكويت. ولكن لن يعطني أيّ من تلك الأعداد العدد ٦

الذي أحتاج إليه ليشكّل عدد ٥٦. لكن، ستتناول ٦ كلاب مجموع ٣٦ قطعة بسكويت. وبعد أن تأكل الكلاب ٣٦ قطعة بسكويت، سيتبقّى لدينا ٢٠ قطعة بسكويت.

فيقول كولمن هنا: "حسناً يجب أن تتناول الكلاب عدداً من قطع البسكويت لأتمكّن من الحصول على عدد ٦ في هذا العمود الأوّل من العدد".

وهو بارع في جدول الضرب بما فيه الكفاية ليدرك أنه مع كلب واحد سيحصل على العدد ٦، لكنّ ذلك لم يفلح. لذا سيكون ٦ العدد التالي من الكلاب، لأنّ ٦ ضرب ٦ هو ٣٦ قطعة بسكويت.

فيقول: حسناً، لنأخذ بالاعتبار ٦ كلاب، ونكتشف ذلك، ثمّ يُكمل استكشاف نتائج اعتماد عدد ٦ كلاب. لنشاهد كيف يُنهي تلك المسألة، ثمّ سنقدّم التعليقات. و٢٠ قطعة بسكويت، سيكون عدد القطط التي ستتناول ٢٠ قطعة بسكويت ٤ قطط.

سيكون مجموع القطط الأربع التي يتناول كلّ منها ٥ قطع بسكويت ٢٠ قطعة، هكذا فحسب. فنحصل على ٣٦ قطعة تتناولها الكلاب، و٢٠ قطعة باقية. يمكن أن تتناولها ٤ قطط. وإذا نظرنا إلى ٦ كلاب زائد ٤ قطط، نحصل على مجموع ١٠ حيوانات. ٦ كلاب تتناول ٣٦ قطعة بسكويت، و٤ قطط تتناول ٢٠ قطعة، أي مجموع ٥٦ قطعة ومجموع ١٠ حيوانات. وكان السؤال المطروح هو التالي، كم عدد الكلاب؟

بإمكاننا القول إنه ثمة ٦ كلاب. إنّ هذا اللغز معقّد بعض الشيء، بخاصة من دون استخدام علم الجبر. لكن عند معالجة المسألة بطريقة منطقية، والتفكير في الخطوات، تُدرك أنّه من الواضح والسهل أن نعرف عدد الكلاب الموجودة.

دعني أعلّق على الطريقة التي اعتمدها كولمن لحلّ هذا اللغز. لم تعجبني كثيراً وسأقول لك السبب. لأنّه استخدم خدعة في الرياضيات بدلاً من تحليل المسألة بطريقة أعتبرها طبيعية.

أعني، بالطريقة التي كنت لأفكّر فيها لحلّ هذه المسألة. كنت لأقول: "حسناً، مع ١٠ قطط إن كانت جميعها قطط، ستتناول ٥٠ قطعة بسكويت. وإن كانت جميعها كلاب، بإمكان ١٠ كلاب أن تتناول ٦٠ قطعة بسكويت. لذلك يجب أن نعثر على عدد نحصل فيه على عدد أقلّ من الكلاب والمزيد من القطط".

وكنت لأحاول تقليص عدد الكلاب ورؤية ما قد يحصل عندئذٍ. بدلاً من ذلك، هو استخدم خدعة جدول الضرب والأعداد التي تنتهي بـ٦.
كان ذلك رائعاً.

وفي الحقيقة، يشير ذلك إلى بعض الاستراتيجيات التي تعتمدها معظم الرياضيات. لأنه في الحقيقة، وبالإضافة إلى ذلك، ما عرضه هو ما يتمّ القيام به عادة في الرياضيات، أي نرى الصلة التي تربط واقع الرياضيات والأمر الذي نهدف إلى تحقيقه.

بالتالي، بإمكاننا العمل على مسألة الرياضيات هذه من دون التفكير في التطبيق ومن ثمّ نرى إن كانت ستفلح.
في هذه الحالة، لقد حلّ هذه المشكلة بنجاح لذا لا يمكنني أن أشتكي.

لكنني كنت لأحلّها بطريقة واقعية أكثر، أي إن كانت أمامي تلك الكلاب والقطط، وتخيّلت وجود ١٠ كلاب و١٠ قطط، أستبدل كلباً بقطّ وأرى ما سيحدث.
تبدو هذه الطريقة طبيعية أكثر بالنسبة لي لإكمال هذه المسألة.

السؤال هو، كيف عالجت تلك المسألة؟

وآمل أن تكون قد حللتها بطريقة مختلفة لم أكن لأفكّر فيها الآن. ثمة طرائق مختلفة لحلّ مسألة ما.

الأسبوع الثالث:	الأعداد – الأعداد غير النسبية
المحاضرة ٣. ١١:	لغز " ينبوع المعرفة"
الموضوع ٢:	ينبوع المعرفة

نأمل أن تقضي نهاية أسبوع رائعة.

إليك **ينبوع المعرفة**، أحد الألغاز المذكورة في كتاب "**قلب الرياضيات**". نأمل أن تستمتع به. ربما سأعطيك مسألة محفّزة بإمكانك العمل على حلّها خلال نهاية الأسبوع.

بخدعة مفصّلة خلال أسبوع التعهّد، وجد تراي شيخ نفسه فجأة وحيداً في الصحاري. وقد طغى على رغبته في أن يغدو عضواً في الأخوية رغبته في شرب شيء يروي عطشه. وبالطبع، إنّ هاتين الرغبتين مرتبطتان. بينما كان يهوم ضائعاً بين رمال الصحراء، بدأ يندم على رغبته في الانضمام إلى الأخوية.

مرّت الساعات والمسافات، وأوشك تراي على الإصابة بالجفاف. بات تراي الآن يقدّر فوائد الصحة. وفجأة، رأى واحة. وفي الواحة رجل مسنّ اسمه آل دانتي يجلس في كشك ظليل بالقرب من بركة صغيرة من رحيق المانجو. لم يكن آل الكبير يدير بار المانجو فحسب، بل كان أيضاً وكيل سفر بإمكانه أن يحجز لتراي جملاً ذا حدبتين يمكّنه من العودة فوراً إلى ميشيغان. في الوقت الحالي، لم يكن تراي يرغب في أي شيء أكثر من مشروب كبير من المانجو اللذيذ.

قال آل لتراي إنه يبيع العصير بكوب يتّسع ٨ أونصات وبسعر ٣,٥٠ دولارات للكوب الواحد. بحث تراي في جيبه بقلق، ورغم أنه وجد كمية كبيرة من الرمل، اكتشف أنه يملك ٣,٥٠ دولارات.

ابتهج تراي ولكن فكرة روي عطشه تدهورت عندما قال آل إنه لا يملك كوباً يتّسع ٨ أونصات. كلّ ما كان يملكه هو كوب يتّسع ٦ أونصات وآخر ١٠ أونصات، ولم يكن أي منهما يحمل علامات. وبما أنّ آل رجل يفي بوعده، لم يقبل أن يبيع أكثر أو أقلّ من كوب يتّسع ٨ أونصات من العصير. فالعصير قيّم جداً في الصحراء.

تساءل تراي بيأس سواء كان من الممكن أن يستخدم كوبَي الـ٦ أو ١٠ أونصات اللذين لا يحملان علامات لوضع ٨ أونصات في كوب يتّسع ١٠ أونصات.
هل تظنّ أنه من الممكن أن يفلح ذلك؟

كان الأمر ممكناً، يُرجى التفسير الآن. وإذا لم يكن كذلك، يُرجى ذكر السبب. آمل أن تتمكّن بعد إجراء مناقشة حول الأعداد خلال هذا الأسبوع، من العمل على حلّ هذه المسألة بطريقة جيّدة.