نص محاضرات الأسبوع الرابع من مساق "التفكير الفعّال من خلال الرياضيات"

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ١:	**فهم الأمور البسيطة بتعمّق: من البساطة إلى اللانهاية**
الموضوع ١:	**مدخل إلى اللانهاية**

الأستاذ: مرحباً.

تسرّني رؤيتك مجدداً. أتطلّع اليوم لإخبارك عن استراتيجية أخرى حول **التفكير الفعّال**. تذكّر أنّ الهدف الأساسي من هذا المساق هو أن أساعدك على إنشاء أفكار جديدة بنفسك أي أن تبتدع أفكاراً خلّاقة وتستكشفها.

ما هي الاستراتيجيات التي تساعدك على اكتشاف أفكار جديدة؟

هذا هو الهدف الحقيقي من هذا المساق. حسناً، يُعدّ فهم فكرة اللانهاية في عالم الرياضيات من بين الإنجازات الفكرية العظمى التي تمكّن الإنسان من تحقيقها. كانت تشكّل اللانهاية مفهوماً جميلاً وعظيماً ورائعاً ولكن كان يخال الإنسان لآلاف السنين أنّه يستحيل التفكير في موضوع اللانهاية. ففي النهاية، كيف كان بإمكان الفكر المحدود أن يفهم فكرة تفوق قدرته على الاستيعاب وتمتدّ إلى اللانهاية؟

أعتقد الناس لآلاف السنين أنّ مفهوم اللانهاية يُعدّ موضوعاً خيالياً سواء في مجال الشعر أو التصوّف. ولم يُدرك علماء الرياضيات إلّا مؤخراً أنة يمكن أن يعالج المرء بشكل منطقي موضوعاً واسعاً إلى هذا الحدّ.

إذاً، سنقوم اليوم بعرض فكرة إمكانية اعتماد أفكار، حتّى تلك التي تبدو غير منطقية ومعالجتها عن طريق استخدام استراتيجيات تفكير محدّدة. سنحاول استخدام استراتيجيات تتمحور حول التعمّق في الأمور البسيطة.

لقد كانت تلك استراتيجية استخدمناها مرات عديدة من قبل في هذا المساق، أو بشكل متواصل في هذا المساق. ومن الفعّال جداً أن تعتاد على التفكير في المواضيع البسيطة بتعمّق، بحيث أنّك ستتمكّن من بلوغ مستويات لم تظنّ قط أنه بإمكانك تحقيقها.

هذا ما سنحاول القيام به اليوم. وكالعادة، سنقوم بذلك من خلال اختيار طالبين والطلب منهما أن يستكشفا هذه الفكرة بنفسهما كما أنك ستحاول في الوقت عينه استكشاف الفكرة بنفسك.

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ١:	**فهم الأمور البسيطة بتعمّق: من البساطة إلى اللانهاية**
الموضوع ٢:	**مشاركة الحلوى قبل تعلّم العدّ**

الأستاذ: أولاً، سأعرّفك على هذين الشخصين. وعلى فكرة، إنهما عظيمان. وذلك لأنّ موضوع اللانهاية شاسع وبالغ الأهمية بحيث أنّنا نعتقد أنّه لا يمكن معالجته إلّا مع أشخاص عظماء. إذاً إليك شخصاً عظيماً.

هذا سكوت. مرحباً بك.

رحّب به.

الطالب ١: مرحباً.

الأستاذ: إليك سكوت. وهذا مارشال. سبق أن قابلت مارشال.

الطالب ٢: مرحباً.

الأستاذ: حسناً. والآن، تُعدّ فكرة **اللانهاية** موضوعاً واسعاً جداً. فهي تتخطى ماهية الأعداد. يبدو أنها تتخطى ما تفكّر فيه.

سكوت: إنها فكرة تتعدّى كونها أمراً ما.

الأستاذ: هل تجعلك هذه الفكرة تشعر بأنّ عقلك سينفجر عند التفكير فيها كثيراً.

الأستاذ: حسناً. إذاً أنت قلق بعض الشيء بشأن هذا الموضوع. الأمر جليّ. من الواضح أنّ سكوت قلق. هل أنت قلق؟

كلا، لست قلقاً.

هيا بنا، سأبدأ بطرح بعض الأسئلة البسيطة عليك.

سكوت: حسناً.

الأستاذ: حسناً. هل أنت مستعد؟

أجل.

مستعد؟ إليك السؤال. تخيّل أنك في عمر السنة والنصف، أو السنتين. وأنك جالس بالقرب من جارك في حضانة أو في غرفة ما، وتلعب بالألعاب. فحضر شخص إلى الغرفة وأعطاك حفنة من الحلوى. حلوى صغيرة الحجم مثل الإم أند إمز. إذاً، حضر هذا الشخص وناولك هذه الحلوى. وأعطاك عدداً كبيراً منها. أعطاك حفنة صغيرة من الحلوى. وكلاكما جالس في الغرفة. حاول تخيّل أنكما تجلسان معاً في الغرفة وأنكما تواجهان صعوبة في اقتسام هذه الحلوى بينكما بتساوٍ. لكن ثمة مشكلة وهي أنكما لا تعرفان كيفية العدّ. لا يمكنكما تعداد حبات الإم أند إمز التي تملكانها. ماذا ستفعلان؟ ها هو سؤالي الأوّل لكما. فكّرا في الموضوع.

ماذا ستفعلان بحلوى الإم أند إمز هذه؟

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ١:	فهم الأمور البسيطة بتعمّق: من البساطة إلى اللانهاية
الموضوع ٣:	الأحجام

حسناً. سكوت، ماذا كنت لتفعل؟

أكدّسها لتشكّل حفنة، ثمّ أقتسمها إلى نصفين.

حسناً ولكن...

لنقل إنّ الحفنتين تبدوان متساويتين. حسناً.

حسناً، إنهما تبدوان متساويتين.

جيّد.

مارشال، ما الخطب في ذلك؟ هل يناسبك ذلك؟

طالما أتمكّن من اختيار الحفنة التي أريدها.

وما سبب شكّك في هذه الطريقة؟ كطفل في السنتين من عمره، ما سبب شكّك؟

أنا لا أريده أن يحصل على عدد أكبر من الحلوى.

ممتاز. ولماذا يُقلقك اختيار إحدى الحفنتين؟

ماذا لو اكتشفت أنّ داخل الحلوى فارغ أو أنه ثمة عدد أكبر من الحلوى في إحدى الحفنتين.

من المستحيل أن نعرف ما إذا كانت الحفنتان متساويتين. يستحيل ذلك. حسناً. والآن يا سكوت من الواضح أنك ولد غير دقيق. ولن يفدك هذا الأمر في هذه الحضانة.

لنفترض أنك أردت أن تكون دقيقاً. وأن تتأكّد من أنّك ومارشال ستحصلان على العدد نفسه من الحلوى. ماذا كنت لتفعل؟ كنت لتأخذ حبّة – أعني حبّتين وتضع كلّاً منهما في حفنة. حبّة لي وحبّة لك. حبّة لي وحبّة لك.

ممتاز، ممتاز.

هل سيرضيك ذلك؟

أجل.

أجل، سيرضيك ذلك.

نعم، فمع اصطفاف حبات الحلوى ستكون على يقين بأنّ الحفنتين تحتويان على العدد نفسه، حتى ولو لم تتمكّن من عدّها، هل فهمت؟

من المثير للاهتمام أن تعرف ما إذا كانت الحفنتان متساويتين في العدد، حتى عندما لا يكون بوسعك تحديد عددها. ما تنظر فيه الآن هو المعنى الأساسي للحجم نفسه. والسبب وراء عدد الأصابع الذي يساوي عدد الأصابع هذا هو أنه بإمكاني موافقتهما في علاقة واحد لواحد، بطريقة واحد لواحد. وإن توافقا هكذا، بحيث أنه يتمّ موافقة كلّ الحلوى في هذه الجهة بحلوى من الجهة الأخرى، عندها سأكون على يقين بأنّ الجهتين تحتويان على العدد نفسه. ولا يهم إذا ما كنت أو لم أكن أعرف اسم الشيء وعدده. حسناً؟

سأقدّم لك مثالاً مرئياً. وسأريك صورة. سأريك صورة، هل أنت مستعد؟

مستعد.

نعم.

سأريك صورة. وستراها على الشاشة خلال دقيقة. سأطلب منك أن تحزر ما إذا كان خطّا الرموز مماثلين، وهل يحتويان على العدد نفسه من الأشياء؟ أو على عدد مختلف من الأشياء. حسناً، مستعدّ؟

إنهما مختلفان.

أوافقك الرأي. إنهما مختلفان.

حسناً. والآن سأطرح عليك سؤالاً مختلفاً. سكوت، ما عدد الأشياء التي يحتوي عليها الخط الأوّل؟

لا أعلم.

بالضبط.

لا فكرة لدي.

الفكرة هي أنّ تحديد العلاقة واحد لواحد هو أمر لا يتطلّب منك أن تتعلّم الاسم والعدد. هيا، لنجرّب مثالاً آخر. مستعد؟ إذاً سنعرض هذه الصورة على الشاشة. الآن.

نعم.

هل هما مماثلان أم مختلفان؟

مماثلان.

مماثلان.

إنهما مماثلان.

صحيح. ومجدداً يا مارشال، ما العدد الموجود في هذا الخط؟

١٤.

واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة، خمسة، ستة، سبعة، ثمانية، تسعة، عشرة، إحدى عشرة، اثني عشر ثلاثة عشر

قمت بعدّها عندما لم تكن منتبهاً.

هذا الأمر يُفشل المسألة بأكملها هذا تصرّف رديء، أنت مطرود من هنا.

حسناً.

إذاً هذا صحيح. إذا قمنا بفصل مفهوم ما، أي مفهوم معادِلات الحجم نفسه. أمّا الآن فسنقوم باستكشاف أعقاب تلك الفكرة البسيطة جداً. تبدو فكرة بسيطة، أليس كذلك؟

أجل.

بسيطة جداً، بسيطة جداً.

في الواقع، لنقم بتدوينها ليتمكّن الجميع من فهم الفكرة بوضوح. ولنتمكّن من القول إنها معروضة على شاشتك. إنهما مجموعتان يمكن إقران عناصرهما بعلاقة واحد لواحد يدلّ على موافقة العناصر معاً. كلّ عنصر من هذه المجموعة متوافق مع عنصر واحد من المجموعة الأخرى. إذا كانت موافقتهما ممكنة، سنقول عندئذٍ إنهما تحتويان على الحجم نفسه، أو على العدد نفسه من الأشياء التي تحتوي عليها. هل توافقني الرأي؟

أجل.

على هذه الفكرة؟

أجل.

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٢:	**برميل من كرات تنس الطاولة**
الموضوع ١:	**تجربة فكريّة: عدد مماثل أو مختلف**

الأستاذ: أريد منك الآن أن تجري تجربة فكرية. ستقوم بتخيّل شيء في ذهنك. هل تجيد فعل ذلك؟

الطالب ١: أجل

الأستاذ: أنت تجيد تخيّل الأمور. إليك ما أريد منك أن تتخيّله. لدي هنا برميل كبير. وثمة كرات تنس الطاولة في هذا البرميل.

الطالب ١: فهمت.

الأستاذ: حقاً؟ هل تعرف كم عدد هذه الكرات؟

الطالب ١: كلا لا أعرف.

الأستاذ: لا تعرف. سأُطلعك الآن على عددها. ثمة كرة تنس الطاولة. وتمّ تدوين عدد على كلّ كرة.

الطالب ١: حسناً.

الأستاذ: تمّ تدوين العدد واحد على إحدى هذه الكرات. وثمّة كرة أخرى تحمل العدد اثنين، وكرة أخرى تحمل العدد ثلاثة، وأخرى أربعة، خمسة، ستة، سبعة، إلخ.

الطالب ١: حسناً.

الأستاذ: هل يسرّك تخيّل ذلك؟ لا مشكلة في ذلك؟ إنها فكرة. لسنا مقيّدين بالواقع. فهو عامل مقيّد. لا يعترف عالم الرياضيات بهذه القيود. فنحن نتكلّم هنا عن موضوع اللانهاية. إذاً، أجل ثمة في هذا البرميل عدد غير محدود من كرات تنس الطاولة.

الطالب ١: حسناً.

الأستاذ: ويحتوي هذا البرميل الموجود هنا على كرات جولف. وثمة كرة جولف تحمل العدد واحد، وكرة أخرى تحمل العدد اثنين، وأخرى العدد ثلاثة، أربعة، خمسة، إلخ.

الطالب: حسناً.

الأستاذ: حسناً. إذاً سأطرح عليك سؤالاً بسيطاً. هل تظنّ أنّ هذين البرميلين يحتويان على العدد نفسه من الكرات؟

الطالب ١: أجل.

الطالب ٢: أجل.

الأستاذ: أجل؟ حسناً. إنهما بالتأكيد يحتويان على العدد نفسه من الكرات، حسناً، لا مشكلة هنا، حسناً. والآن سأخرج من البرميل كرة تنس الطاولة التي تحمل العدد واحد، أي كرة تنس الطاولة رقم واحد. سأُخرج كرة تنس الطاولة العدد واحد، وسأتخلّص منها.

الطالب ١: حسناً.

الأستاذ: حسناً. والآن سأطرح عليك السؤال نفسه. هل تظنّ أنّ البرميل الذي يحتوي على كرات تنس الطاولة المتبقية يحتوي على عدد من كرات تنس الطاولة مساوٍ لعدد كرات الجولف؟ إنه سؤال جيّد. ما رأيك؟ هل العددان مماثلان أو مختلفان؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٢:	**برميل من كرات تنس الطاولة**
الموضوع ٢:	**اللانهاية ناقص واحد – ارتكاب الأخطاء**

سكوت؟ لانهاية ناقص كرة تنس الطاولة واحدة. حسناً، ولكن لا تنسى أنّ اللانهاية ليست عدداً. حسناً.

أجل.

هل تظن أنّ العددين متساويان؟

أجل.

حسناً. هل اضطررت إلى التفكير في ذلك؟ أو هل أنت واثق من نفسك؟ أو قلت إنّ اللانهاية ناقص واحد، لأنك تخلّصت من العدد واحد في سلسلة الأعداد اللامتناهية. إذاً أعتقد أنهما متساويان بحيث أنّ كليهما— إنني متأكّد من صحة فكرة اللانهاية ناقص واحد.

على فكرة، بإمكانك أن توافق على أفكار خاطئة. حسناً.

صحيح. لا مشكلة.

أجل، إذاً لست متأكداً من فكرة اللانهاية ناقص واحد. إذاً، أجل إنهما متساويان. حسناً، لماذا؟

لأنّ الترقيم اعتباطي. بمعنى أنّه—

ماذا تعني في قولك ذلك؟

ثمة كرة تنس طاولة تحمل العدد واحد، وكرة جولف تحمل العدد واحد أيضاً. لكنّ العدد نفسه، أي العددان المقابلان—كرة تنس الطاولة، اثنان، ثلاثة، أربعة، خمسة. يبدو التسلسل مماثلاً في الأعداد واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة، خمسة، ستة، ولديك واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة، خمسة، ستة. وهلمّ جراً.

حسناً.

إذاً سيكون لديك العدد نفسه على الدوام، بغض النظر عن كونه—

لكنّك تخلّصت من كرة تنس طاولة واحدة.

أجل، إذاً تكون الأعداد التي تحملها كرات تنس الطاولة اعتباطية. هذا ما يبدو عليه الأمر على الأقل.

حسناً، لا أعرف ما تعنيه بالضبط بقولك اعتباطياً.

تحمل كلّ كرة تنس طاولة عدداً.

أجل.

وتحمل كلّ كرة جولف عدداً، هذا صحيح. وأعدادها تزداد على الدوام. على كلّ حال، من أجمل ميزات تعلّم أفكار جديدة أو إنشاء أفكار جديدة هي مواجهة الصعوبات. وعدم اليقين. والغموض.

إنها ليست جوانب من العالم يجب تجاهلها وتأمّل ألّا تحدث. بل هي جزء من العملية التي تساهم في إيضاح الأفكار. إذاً مع العلم أنّ سكوت يواجه غموضاً وارتباكاً وأفكاراً عديدة—إنه جزء عادي من العملية.

عند الاستماع إلى محاضرات منقّقة الكلام—يتمّ تجاهل مضمونها. فيتم إخفاء كيفية تكوّن الأمور.

في هذا الصفّ—يهدف هذا الصف إلى عدم إخفاء ذلك، بل أن يُظهر في الحياة الواقعية كيفية تمكّن الناس من اكتشاف أفكار واضحة تنبع من أفكار غامضة.

حسناً.

إذاً، لدي سؤال لك يا مارشال. عندما كنّا نتكلّم عن حبات الإم أند أمز، اكتشفتَ استراتيجية—

اكتشفتما استراتيجية جعلتكما واثقين من أنّ مجموعتَي الإم أند إمز تحتويان بالفعل على العدد نفسه.

صحيح. ماذا كانت الطريقة المُعتمدة؟

خذ حبة إم أند إم وضعها في كومة، وخُذ حبة أخرى وضعها في كومة أخرى. وهلمّ جراً. قم بصفّها. فكيف ستقوم بصفّها؟ كيف ستبيّن ذلك بشكل مرئي؟

هنا، بواسطة أصابعك. ضعها إلى جانب بعضها. سأتولّى الجهة اليُسرى، وأنت اليُمنى.

حسناً.

إذاً ثمّة مقابل كلّ حبّة إم أند إم موجودة على جهتي حبّة إم أند إمز على جهتك. صح؟

أجل.

هذا ما خطر في ذهننا، أي أنّ المجموعتين تحتويان على الحجم نفسه إذا كان ثمة علاقة واحد لواحد. لنعُد الآن إلى موضوع كرات الجولف وتنس الطاولة.

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٢:	**برميل من كرات تنس الطاولة**
الموضوع ٣:	**الحجم نفسه**

الطالب ٢: عندما كان ثمة في كلّ برميل أعداد دُوِّنَ كلّ منها على كرة بإمكاننا صفّها على الشكل التالي: واحد، واحد، اثنان، اثنان، ثلاثة، ثلاثة، أربعة، أربعة، وهلّم جراً.

الأستاذ: صحيح.

الطالب ٢: إذاً يتمتّع البرميلان بالحجم نفسه.

الأستاذ: صحيح. وعند التخلّص من كرة تنس طاولة العدد واحد.

الطالب ١: سنحصل على واحد، اثنان ومن ثمّ اثنان، ثلاثة، وثلاثة، أربعة، خمسة، ستة، سبعة، ثمانية.

الأستاذ: جيّد جداً، جيّد جداً. وعند اعتماد هذه العملية، أي هذا الوصف الذي قمت به، بعبارة أخرى، يتمّ إقران كرة تنس طاولة العدد اثنين بكرة جولف العدد واحد.

الطالب ١: صحيح.

الأستاذ: يتمّ إقران كرة تنس طاولة العدد ثلاثة بكرة جولف العدد اثنين، وكرة تنس طاولة العدد أربعة بكرة جولف العدد ثلاثة، وهلمّ جراً. هل سيتمّ إقران كلّ كرة تنس طاولة مع كرة جولف واحدة؟

الطالب ١: أجل.

الأستاذ: صحيح. وهل سيتمّ استخدام جميع كرات الجولف وتنس الطاولة في هذه العملية؟

الطالب ١: أجل.

الأستاذ: أجل. إذا اعتمدنا على هذا المفهوم، أيّ أنّ العلاقة واحد لواحد تشير إلى الحجم نفسه، إذاً نكون قد وجدنا الخلاصة الصحيحة التي تُبيّن أنّ هاتين المجموعتين تتمتّعان بالحجم نفسه. وعلى فكرة، يُعدّ الحجم والعدد مصطلحين غامضين بعض الشيء. وعند إنشاء مفهوم جديد، كما نفعل هنا، لا نقصد عند معالجة فكرة اللانهاية مصطلحَي الحجم أو العدد بل إننا نتكلّم بالعامية، ولا نقصدهما بشكل حرفيّ. إذاً سنقوم بإنشاء مصطلح جديد. وغالباً ما يحدث ذلك في عالم الرياضيات. عندما تبتكر مفهوماً جديداً، تطلق عليه اسماً ها قد حصلنا على مفهوم يتمحور حول فكرة إقران مجموعتين في علاقة واحد لواحد، أي أنّهما تتمتّعان بعدد عناصر المجموعة نفسه.

إذاً، لقد استخدمنا تسمية عدد عناصر المجموعة للدلالة على أنّ المجموعتين تحتويان على العدد نفسه وذلك عند التكلّم عن مجموعات اللانهاية.

الطالب ١: حسناً.

الأستاذ: حسناً. إذاً سنستخدم هذا المصطلح.

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٣:	**فندق اللانهاية**
الموضوع ١:	**فندق اللانهاية**

لديّ سيناريوهات أخرى في مخيلتي لك، بعض السيناريوهات الذهنية، حسناً؟ هل أنت جاهز؟

حتماً.

ممتاز.

حسناً، لا أعلم إذا سبق لك أن زرت أريزونا. هل زرت أريزونا؟

نعم. نعم، لقد زرتَها.

هل أنت على علم بالصحراء في أريزونا؟

أنت تقصد الولاية بكاملها؟

نعم، الولاية كاملةً.

نعم، هذه هي. هذه هي.

وأكثر ما تتضمنه صحاري أريزونا الموتيلات. وغالباً ما تكون هذه الموتيلات متواضعة. إنها تحوي غرفة وغرفةً أخرى إلى جانبها بالإضافة إلى غرفةٍ أخرى وهلمّ جرّاً، وهذه الغرف-- أنت تعلم.

لا أعلم إن كنت تدرك ذلك، ولكن يبدو أنّ هنالك موتيلاً في صحراء نيفادا-- هل قلت أريزونا؟

حسناً. لنفترض أنها ولاية نيفادا.

لقد نقلت ولايتين في جملةٍ واحدة. إذاً، على أي حال، في إحدى هاتين الولايتين، ثمة موتيل يحوي الكثير من الغرف. يشمل غرفةً رقمها ١، وإلى جانبها الغرفة رقم ٢، ومن ثمّ الغرفة رقم ٣، وبعد ذلك الغرفة رقم ٤، ورقم ٥ وإلى ما هنالك. هل هذا مفهوم؟

نعم.

إنها صحراء فسيحة. الكثير من الغرف. وكأنّ عددها لا ينتهي. حسناً.

حسناً. ممتاز.

يُطلق على هذا الموتيل اسم "**فندق اللانهاية**".

"**فندق اللانهاية**".

حسناً، على أي حال، أنت مدير موتيل "**فندق اللانهاية**". موافق؟

لا ضرر في أن تكون أنت المدير، صحيح؟

نعم، لا بأس.

جيّد.

حسناً، أنت مدير الموتيل وذات يوم، وصل باص إلى هناك.. وصل الباص وهو يحمل فريق كرة قاعدة. وعدد اللاعبين في الفريق كبير جداً. وعلى قميص كل راكب يظهر رقم.

إذاً، ثمة لاعب يحمل الرقم ١، ولاعبٌ آخر يحمل الرقم ٢، وآخر الرقم ٣، وآخر الرقم ٤. والرقم ٥ وهلمّ جرّاً. موافق؟

نعم، لا مشكلة.

إنه فريقٌ كبير.

إذاً، على أي حال، يزور هذا الفريق الموتيل الذي تتولى إدارته ويطلبون الإقامة في الغرف.

إنه فريقٌ محترف.

لذا، لن يستطيعوا الإقامة في الغرفة نفسها.

طبعاً لا.

لا، بالتأكيد لا. بالتالي، يتعين على كل لاعب من الفريق أن يملك غرفته الخاصة. وبما أنك مدير الفندق، كيف ستوفر الغرف لكل فريق كرة القاعدة؟ كيف ستفعل ذلك؟ إنه سؤال بسيط. إلى أين يذهب كل لاعب؟

كنت لأعطي كل واحدٍ منهم الغرفة التي تحمل الرقم الظاهر على قميصه.

صحيح، تماماً. أعطيهم رقم الغرفة الظاهر على قمصانهم. لا مشكلة.

وبالمناسبة، إذا فكرنا في المسألة من منظورٍ معين، نكتشف أنّ علاقة واحد لواحد تجمع بين الغرف واللاعبين.

إذاً، لقد اكتظّ الموتيل وأنت سعيدٌ جداً لأنك المدير. وعلى حين غرّة، تصل سيارة ليموزين كبيرة، تستقلّها مالكة الفريق.

إذاً، تصل مالكة الفريق في سيارة الليموزين وتزور مكتبك وتقول لك إنها تريد الإقامة أيضاً في غرفة. طبعاً إنّ الغرف مكتظة بالنزلاء. لذا، يبدو أنه سيتعين على النزلاء الانتقال. لا تستطيع إعطاءها غرفة لأنّه ليس من غرفة شاغرة، ولكن، يمكنك أن تطلب من النزلاء الانتقال.

إذاً، بما أنك المدير، سؤالي لك هو التالي، هل تستطيع توفير غرفة لمالكة الفريق؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٣:	**فندق اللانهاية**
الموضوع ٢:	**إفساح غرفة في فندق اللانهاية**

المتحدث ١: هل يمكنك توفير غرفة للمالكة؟ ما رأيك؟

المتحدث ٢: نعم.

المتحدث ١: هل يمكنك ذلك؟

المتحدث ٢: نعم.

المتحدث ٣: نعم، أستطيع.

المتحدث ١: هل ستتمكن من ذلك؟

المتحدث ٣: نعم.

المتحدث ١: حسناً، حسناً، إذاً، كيف ستقوم بذلك يا مارشال؟

المتحدث ٣: أوفر لها الغرفة الأولى وأطلب من الجميع إخلاء غرفةٍ واحدة.

المتحدث ٢: أحسنت.

المتحدث ١: هل أنت موافق على ذلك؟

المتحدث ٢: موافق.

المتحدث ١: حسناً، يخلي الجميع غرفةً واحدة. بشكلٍ تحصل فيه المالكة على الغرفة الأولى. وبالتالي، يتم الحفاظ على بناء علاقة واحد لواحد. حسناً، ممتاز. بدا ذلك ممتازاً.

لنفترض الآن أنّ المالكة تغادر مجدداً فيعود الجميع إلى غرفهم الأصلية. بالمناسبة، نسيت أن أسألك، ما اسم الفريق؟ سأعطيك تلميحاً، إنه اسم فعلي لفريق بيسبول محترف.

المتحدث ٢: ذا إنفينيتيز؟

المتحدث ١: لا.

المتحدث ٢: بوسطن ريد سوكس.

المتحدث ١: لا.

المتحدث ٢: ذا هيوستن أستروس.

المتحدث ١: لا.

المتحدث ٢: تكساس رينجرز.

المتحدث ١: لا.

المتحدث ٢: سان فرانسيسكو جاينتس.

المتحدث ١: اقتربت من الإجابة الصحيحة.

المتحدث ٢: عددٌ كبير.

المتحدث ١: حسناً، ثمة إجابةٌ صحيحة واحدة. حين يكون لمجموعتين المجموعات اللامتناهية من الحجم نفسه، ماذا نقول إنها تتضمن، ماذا تتضمن؟

المتحدث ٢: أصلية المجموعة.

المتحدث ١: نعم.

المتحدث ٢: نعم. الأعداد الأصلية، طبعاً.

المتحدث ١: الأعداد الأصلية، حسناً. إذاً، كاردينالز وهو اسم فريق بيسبول عريق. إلى أية مدينة ينتمي فريق كاردينالز؟

المتحدث ٢: سانت لويس.

المتحدث ١: سانت لويس، سانت لويس كاردينالز. إذاً، كاردينالز هو اسمٌ فعلي لفريق بيسبول أميركي، فريق عريق. وهل هم محترفون؟

المتحدث ٢: أصبحوا حالياً في مرحلة التصفيات.

المتحدث ١: حقاً. نعم، بالتحديد. حسناً، على أي حال، يعود فريق كاردينالز إلى غرفهم الأصلية. رقم ١ في فريق كاردينالز في الغرفة الأولى، ورقم ٢ في الغرفة الثانية، رقم ٣ في الغرفة الثالثة وإلى ما هنالك. يبدو أنك حين تمارس لعبة كرة القاعدة، يجب أن ينافسك أحدهم. بالتالي، يصل باص آخر كبير. ويستقلّ الباص الآخر الفريق المنافس.

بالمناسبة، إنه فريق جاينتس، كما قلت. إنه فريق جاينتس. إذاً، ثمة من يحمل الرقم ١ في فريق جاينتس، وآخر الرقم الثاني، والثالث، والرابع وإلى ما هنالك

صحيح، إنه فريقٌ يشمل أيضاً عدداً كبيراً من اللاعبين.

المتحدث ٢: نعم.

المتحدث ١: نعم، إنه فريق كبير. أنت المدير. إذاً--

المتحدث ٢: أنا أواجه مشكلة.

المتحدث ١: أنت تواجه مشكلة. تواجه مشكلة لأنّ الغرف بأكملها مكتظة بلاعبي فريق كاردينالز. والآن، ثمة سؤالٌ يطرح نفسه، هل تستطيع التفكير في وسيلة لتوفير غرف لفريق جاينتس؟ طبعاً، يستحيل توفير الغرف لهم-- لا يُسمح لك بالتأكيد توفير غرفة واحدة لشخصين، فهو فريق محترفين.

على كل لاعبٍ منهم امتلاك غرفته الخاصة. إذاً فالسؤال هو، هل تستطيع التفكير في وسيلة—يبدو أنك ستطلب من الآخرين إخلاء-- هل تستطيع التفكير في وسيلة لنقل الآخرين كي يتمكن كل لاعب من فريق جاينتس من الإقامة في غرفة؟

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٣:	فندق اللانهاية
الموضوع ٣:	طريقة الإشغال

إذاً يا مارشال، هل خطرت في ذهنك طريقة تخوّلك وضع كلّ من هؤلاء اللاعبين في غرفهم؟

أظن ذلك.

ما هي؟

سأطلب من فريق ذا كاردينالز التنحّي جانباً، وأضع فريق ذا جاينتز أوّلاً.

آه.

حسناً. لنفكّر في هذا الأمر.

حسناً.

أوّلاً، إنها فكرة جيّدة على هذا الصعيد. عندما يأتي المالك—هل تذكر عندما أتى المالك؟

تمحورت طريقتك حول جعل الجميع يتنحّون غرفة واحدة لإيجاد مكان للمالك. ومن أكثر الاستراتيجيات إنتاجية التي ستتعلّمها وتستخدمها في حياتك هي أن تستعمل مجدداً أفكاراً كانت مفيدة سابقاً. تشكّل الأعمال السابقة التي كانت مفيدة في الماضي مصدراً جيداً لتحقيق إبداعات.

تتطلّب أحياناً تعديلات، ولكنّها تُعدّ نقطة بداية رائعة. لنعد الآن ونفكّر في استراتيجية نقل فريق ذا كاردينالز ووضع ذا جاينتس أوّلاً. حسناً؟

لنناقش هذه الفكرة. إذاً هل فهمت الاستراتيجية يا سكوت؟

أجل، بالتأكيد.

حسناً. وما رأيك فيها؟ هل تظنّ أنّها ناجحة؟

كلا.

كلا؟ حسناً.

إنه مارشال. قال مارشال ذلك.

مارشال.

إذاً سأقول أجل.

مع الإبلاغ عن وضع فريق ذا جاينتس في الغرف أوّلاً، متى يمكن وضع فريق ذا كاردينالز في غرف من دون نقل غرفهم إلى ما لا نهاية؟

عجباً. كنت أتخيّل أنهم سيبقون في غرفهم لمدة دقيقتين ثم الانتقال إلى غرف أخرى، ليتمكّنوا من النوم

آه، فهمت.

بإمكانهم النوم لدقائق.

آه.

كلا. يجب أن يقيموا في غرف خاصة بهم. حسناً.

حسناً.

فما الخطب في اقتراحك؟ لا يوجد عدد تبدأ به غرف فريق ذا كاردينالز.

هذا صحيح.

بعبارة أخرى، نسأل مثلاً في أي غرفة سيقيم العضو الأوّل من فريق ذا كاردينالز؟

هل أدركت المشكلة؟

أجل.

نريد اعتماد طريقة تتمحور حول توزيع اللاعبين على الغرف. وتكمن مشكلة هذه الطريقة في عدم وجود عدد معيّن تحمله الغرف الخاصة بأعضاء فريق ذا كاردينالز.

لا يشبه الأمر العدد ١٠٠ أو ١٠٠٠ أو شيء من هذا القبيل. حسناً؟

حسناً.

إذاً هذا رائع. يجب أن نرى إن كان هناك تعديلاً يمكن أن يكون صالحاً.

نذكر من بين المشاكل أنّ غرفة العضو الأوّل من فريق ذا كاردينالز لا تحمل عدداً معيّناً. لذلك علينا أن نصحح هذه الميزة من أجل ابتكار فكرة جديدة ناجحة.

أجل.

موافق؟ مفهوم؟ هل أنت تفكّر في الأمر؟ هل أنت تفكّر؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٣:	**فندق اللانهاية**
الموضوع ٤:	**مطابقة الغرف مع الأعداد الطبيعية**

الأستاذ: ما هي الطريقة التي اعتمدتها للتأكّد من أنّ عضو فريق ذا كاردينالز، مثل العضو الأوّل، سيحصل على غرفة خاصة به وأنه لن يُترك في الخارج وسط الصحراء الباردة؟
الطالب: لنضعه في غرفة العدد واحد.

الأستاذ: حسناً. إنها فكرة جيدة. أتعلم؟ إن كنت تريد التأكّد من أنّ العضو الأوّل من فريق ذا كاردينالز سيحصل على غرفة، لنضعه في غرفة العدد واحد.
جيد جداً، حسناً.

إذاً وضعنا العضو الأوّل من ذا كاردينالز في غرفة. ماذا نفعل الآن؟

الطالب: أعتقد أننا إذا اعتمدنا استراتيجية مماثلة لتلك التي استخدمناها لحلّ مسألة حبوب الإم أند إمز أي نعطي غرفة لعضو من فريق ذا كاردينالز، وأخرى لعضو من فريق ذا جاينتس.
الأستاذ: حسناً.
الطالب: حسناً، أجل، سينجح ذلك.
الأستاذ: من نضع في الغرفة الثانية؟
الطالب: العضو الأوّل من فريق ذا جاينتس.
الأستاذ: ومن نضع في الغرفة الثالثة؟
الطالب: العضو الثاني من فريق ذا كاردينالز.
الأستاذ: جيد جداً، جيد جداً. وهلمّ جراً.
الطالب: وما إلى ذلك.

الأستاذ: حسناً. إذاً أصبح لدينا هنا—قمنا بتدوين الفكرة من أجلك. يتبيّن أنّ أعضاء فريقَي ذا كاردينالز وذا جاينتس يتناوبون، العضو الأوّل من ذا كاردينالز والعضو الأوّل من ذا جاينتس، العضو الثاني من ذا كاردينالز والعضو الثاني من ذا جاينتس، العضو الثالث من ذا كاردينالز والعضو الثالث من ذا جاينتس. أليس هذا رائعاً؟
الطالب: أمر بسيط.

الأستاذ: بسيط، ولكن أنظر إلامَ فعلت. قمت بأخذ فريق لانهائي العدد، وفريق آخر لانهائي العدد، ولا يزال مجموع هذان الفريقان اللانهائيان يخضع لعلاقة واحد لواحد مع عدد الغرف. إذاً لقد قمت بإجراء علاقة واحد لواحد مع أعداد الغرف هذه. وعلى فكرة، إنّ أعداد الغرف هي في الحقيقة الأعداد الطبيعية. إنه المصطلح الذي يعود إلى تلك الأعداد، واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة، خمسة، وهلمّ جراً. إنها **الأعداد الطبيعية.**
حسناً، لنتمهّل لبرهة—أحب فريقا كرة القاعدة و—
الطالب: أنا أيضاً.

الأستاذ: هل تحبّهما حقاً؟
الطالب: إنهما مثالان جيّدان.
الأستاذ: ممّا يجعل الأمر واقعياً. والآن، لنفكّر في نسخة حسابية لهذه الفكرة.
الطالب: حسناً؟

الأستاذ: حسناً. أخبرني الآن، إن كانت الأعداد الطبيعية أمامك هل بإمكانك أن تُثبت لي لماذا تتمتّع **الأعداد الطبيعية** و**الأعداد الصحيحة** بعدد عناصر المجموعة نفسه؟ على فكرة، إنّ الأعداد الصحيحة هي الأعداد الكاملة، أي الأعداد التي ليست كسوراً.

إذاً لديك الأعداد الموجبة مثل اثنين، ثلاثة، أربعة، خمسة. لديك العدد صفر. ولديك الأعداد السالبة مثل ناقص واحد، ناقص اثنين، ناقص ثلاثة، ناقص أربعة. وهذه هي **الأعداد الصحيحة**. إذاً بإمكانك أن تُثبت لي أنّ الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة تحتوي على عدد عناصر المجموعة نفسه؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٤:	**إلى أي مدى الأعداد الصحيحة كبيرة؟**
الموضوع ١:	**آراء الطلاب – فهم السؤال**

من أهمّ الأمور التي تساهم في حلّ مسألة صعبة هي إمكانية **فهم السؤال**.

تبدو هذه الفكرة بسيطة. أي أنّني أبدو سخيفاً عندما أتفوّه بها. لكن في الواقع، غالباً ما يُساهم فهم السؤال في عالم الرياضيات في حلّ المسألة الرياضية بنسبة ٨٠٪. لأنّه عندما تتّضح لك المسألة تتأتى عن الوضوح فكرة تخوّلك إيجاد الحلّ.

في هذه الحال، وسأعيد السؤال الذي طرحته، ألا وهو: لماذا يساوي عدد عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية عدد عناصر مجموعة الأعداد الصحيحة؟

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٤:	إلى أي مدى الأعداد الصحيحة كبيرة؟
الموضوع ٢:	ما هي المعلومات التي تحتاج إليها؟

الأستاذ: وما أعنيه بفكرة فهم السؤال هو هل تعلم ما يجب القيام به للإجابة على السؤال؟

فقول إنهما يحتويان على عدد عناصر المجموعة نفسها هو مجرّد كلمة. لكن ماذا تعني هذه الكلمة؟ بعبارة أخرى، ما الذي يجب أن تحصل عليه لتُثبت أنّ عدد عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية يساوي عدد عناصر مجموعة الأعداد الصحيحة؟ دعني أطرح عليك السؤال أوّلاً يا سكوت.

إن أردت أن تنجح في إثبات أنّ عدد عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية يساوي عدد عناصر مجموعة الأعداد الصحيحة، فما الذي يجب أن تعرضه أمامي؟

الطالب: يجب أن أفهم ماهية الأعداد الصحيحة والأعداد الطبيعية.
الأستاذ: حسناً. يجب أن تعرف ماهيتهما.
الطالب: لم أحضر صفّ رياضيات منذ مدّة طويلة.

الأستاذ: هذا جيّد، هذا جيّد، أعجبني ذلك. يجب أن تعالج هذا النوع من المسائل. أجل، يجب أن تفهم ماهية هاتين المجموعتين. ما الذي يجب أن تعرضه لتُبرهن أنّ المجموعتين تحتويان على عدد العناصر نفسه؟
الطالب: المعادلة.

الأستاذ: أي نوع من المعادلة؟ ما الذي تعنيه بكلمة معادلة؟
الطالب: أي أنه ثمة عدد صحيح لكلّ عدد طبيعي.

الأستاذ: هذا صحيح. أجل. إذاً، لاحظ الآن أنّ سكوت قام في تلك اللحظة بتوضيح ما يجب إنتاجه بالتحديد للتمكّن من حلّ المسألة الرياضية. والآن لنحوّل هذه الفكرة إلى واقع ملموس.

بعبارة أخرى، بإمكاني أن أعطيك هذه الورقة. فتتمكّن من رؤيتها على شاشتك، علماً أنّها تضمّ لائحة من الأعداد الطبيعية ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠ وهلمّ جراً.

والآن، عليك أن تضع عدداً صحيحاً في هذه الخانة الموجودة إلى جانب العدد واحد، وعدداً صحيحاً آخر في الخانة الموجودة إلى جانب العدد اثنين، وهلمّ جراً.

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٤:	إلى أي مدى الأعداد الصحيحة كبيرة؟
الموضوع ٣:	خصائص عدد عناصر المجموعة

ومع أي خاصية يجب أن تضعها؟ هل تساوي عدد الأعداد الصحيحة؟

أجل.

يجب أن تُقرن عدداً صحيحاً بالعدد واحد. وعدداً صحيحاً آخر بالعدد اثنين. وآخر بالعدد ثلاثة.

حسناً. وما الهدف من ذلك؟

لتتمتّع المجموعتان بالحجم نفسه.

حسناً، وما هي الأعداد الصحيحة التي يجب أن أضعها هنا؟

من المستحسن أن تبدأ بالعدد واحد، ثمّ اثنان.

حسناً.

لنفترض أنّني دوّنت العدد واحد، ثمّ اثنان، ثلاثة، أربعة، خمسة، ستة، سبعة، دوّنت الأعداد بكلّ بساطة، هل يمكن لذلك أن يُثبت أنّ عدد عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية يساوي عدد عناصر مجموعة الأعداد الصحيحة؟

لا أعلم.

حسناً. ممتاز.

حسناً. ممتاز.

حسناً. والآن يا سكوت، عندما كنت تحاول أن تُثبت أنه إذا تخلّصنا من كرة تنس طاولة واحدة سيساوي عدد كرات تنس الطاولة عدد كرات الجولف، وذلك عندما لا نتخلّص من أي كرة جولف كيف عرضت ذلك؟ لماذا يُعتبر من الصحيح أنهما يتمتّعان بعدد عناصر المجموعة نفسه؟

لأنة مقابل كلّ كرة جولف، ثمة كرة تنس طاولة.

صحيح.

في كافة الحالات.

وكيف قمت بالتحديد بإقرانها ببعضها البعض؟ دوّن الطريقة التي اعتمدتها لإثبات أنّ كرات الغولف، ناقص كرة جولف العدد واحد، تتمتّع بعدد عناصر المجموعة نفسه، آسف أعني كرات تنس الطاولة، أي أنّ كرة تنس الطاولة العدد واحد ناقصة، فتتمتّع عندئذٍ كرات تنس الطاولة بعدد عناصر المجموعة نفسه الموجود على مستوى كرات الجولف. كيف ستقوم بإثبات ذلك؟

بكلّ بساطة، قمت بإقرانها معاً بحيث يكون العدد واحد في أوّل العمود ويمثّل كرات الجولف. وأضع العدد اثنين في العمود الآخر-

أو ستبدأ بالعدد اثنين لأنّك تخلّصت من كرة تنس الطاولة. جيّد جداً. ومن ثمّ تُكمل العمل. وتُكمل. في الحقيقة، لمَ لا تُكمل قليلاً، لنكتشف النمط المُعتمد.

حسناً.

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٤:	إلى أي مدى الأعداد الصحيحة كبيرة؟
الموضوع ٤:	التراجع بغية التقدُّم

سكوت، سأعطيك بعض التلميحات التي لا تمتّ للرياضيات بصلة. لن أعطيك تلميحاتٍ خاصة بالرياضيات. إنها مسألةٌ رياضية، أليس كذلك؟

نعم.

سأعطيك الآن تلميحاً لا يمتّ بصلة إلى الرياضيات. إذاً، حين تحلّ مسألةً صعبة أو مسألةً لا تفهمها يكون الأمر مربكاً فتنسحب. تستند إلى أمرٍ يمكنك حلّه، إلى أمرٍ أبسط وذي صلة وتثق بأنك تستطيع إنجازه. على سبيل المثال، في هذه الحالة، نحاول تدريجياً تنمية الأفكار.

أنجزنا بعض المسائل ولم ننجز البعض الآخر منها. إذاً، يقتضي امتحاني لك الآن تذكر بعض الأمثلة التي قمنا بحلّها سابقاً والتي تعرض علاقة واحد لواحد مع الأعداد الطبيعية.

إذاً، أقترح عليك أن تفكر في غرف الموتيل. وتفترض أنها مشابهة للغرف هنا، الغرفة رقم ١، والغرفة رقم ٢ والغرفة رقم ٣. سوف ندوّن على ورقةٍ صغيرة هنا. وتذكّر--

تبدو العملية ناجحة.

استغرقت وقتاً معيناً. ألم يكن ما أعطيته إياه تلميحاً ممتازاً؟ حسناً إذاً، قل لي، أولاً-- وبالمناسبة، لقد دوّنت إلى جانب العدد ١ العدد السالب ١. ووضعت إلى جانب العدد ٢ العدد الإيجابي ١. ووضعت إلى جانب العدد ٣ العدد السالب ٢. ووضعت إلى جانب العدد ٤ العدد الإيجابي ٢، الأعداد الإيجابية والسالبة بالتعاقب. كيف خطرت الفكرة في بالك؟

حسناً، كان ذلك عكس ما فعلت في وقتٍ سابق، حين دوّنت العدد الطبيعي ١ ومن ثمّ وضعت العدد الطبيعي ١ من جديد وبعد ذلك، وضعت العدد السالب ١ والعدد الإيجابي ١ إلى جانب هذه الأعداد المتطابقة مع تلك. أي أنك استخدمت الأعداد الطبيعية ودوّنت ١، ٢، ٣، ٤، ٥، و٦. ومن ثمّ، بالنسبة إلى الأعداد الصحيحة، حصلت على العدد السالب ١ المتطابق مع العدد الطبيعي ١ والعدد الإيجابي ١ المتطابق مع العدد الطبيعي ٢ وهلمّ جرّا.

والآن، سأطرح عليك هذا السؤال. هل أدّت الأعداد الكبيرة والأعداد الأصلية أي دور أو هل ترى علاقة بين هذه المسألة والمسألة التي تتعلق بالأعداد الكبيرة والأعداد الأصلية؟

نعم.

حسناً. ما هي المسألة؟

الأعداد الكبيرة هي الأعداد الصحيحة الإيجابية والأرقام الأصلية هي الأعداد الصحيحة السالبة.

ممتاز. إذاً، هل ترى هذه العلاقة؟

نعم.

حسناً. إذاً، مجدداً، يمكن لفكرة العودة إلى أمرٍ أنجزته سابقاً، أن توضح لك أموراً أنجزتها. إذاً، هذا ممتاز.

ممتاز.

بالمناسبة، لقد حذفت العدد ٠. لم تنتهِ بعد-- ما زالت لديك مشاكل. المالكة-- ليس العدد ٠ متوفراً بعد. إذاً، كيف ستحلّ هذه المسألة؟

حسناً، إذا كان عليك البدء من العدد الطبيعي ١، وإن كان معادلاً للعدد ٠، سوف يتم حلّ العدد ٠-- مشكلة المدير.

نعم.

وماذا عن العدد ٢؟ من ثمّ العدد ٢؟

يكون العدد ١. يكون العدد ٣ العدد السالب ١. يكون العدد ٤ ٢ وهلمّ جرّا.

صحيح، نعم، ممتاز.

جيد.

إذاً، هل انتهيت؟ إلى متى تريدني أن أستمر في التدوين؟

نعم، أرى ذلك.

لم تنتهِ فعلاً من التدوين.

أرى ذلك.

إذاً، سوف تدوّن لوقتٍ طويل.

ممتاز.

ممتاز. وماذا استنتجت هنا؟ وماذا أثبتّ؟

استنتجت أنّ لكل عددٍ طبيعي، هنالك عددٌ صحيح إيجابي وعددٌ صحيح سالب. أو لكل عددٍ طبيعي--

لا.

ثمة أمرٌ واحد فقط لكل عدد طبيعي. إذاً، لقد أظهرت أنّ أصلية عددٍ ما تعادل أصلية أي عدد من الأعداد الطبيعية حتى الأعداد الصحيحة.

صحيح.

إنّ أصلية الأعداد الطبيعية هي نفسها أصلية الأعداد الصحيحة، الأعداد الإيجابية، والسالبة والعدد ٠. هذا مشوّق، أليس كذلك؟

إذ لديك الأعداد العديدة الإيجابية إلى اللانهاية والأعداد العديدة السالبة إلى اللانهاية والعدد ٠. ولكن في الواقع، يمكنك بناء علاقة واحد لواحد لهذه الأعداد.

نعم.

صحيح؟ تم إثبات ذلك.

تم إثبات ذلك.

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٤:	إلى أي مدى الأعداد الصحيحة كبيرة؟
الموضوع ٥:	التوصّل إلى فكرة

الأستاذ: هل أنت مسرور لتمكّنك من حلّ المسألة الرياضية؟

الطالب ١: لقد تطلّبت وقتاً طويلاً، ولكن أجل إنني مسرور.

الأستاذ: هل تطلّبت وقتاً طويلاً جداً؟ الأمر المثير للاهتمام هو أنها في الحقيقة لم تتطلّب وقتاً طويلاً منه. تطلّب فهم هذه الأفكار وقتاً طويلاً من الإنسان. فالأفكار لا تخطر في الذهن بكلّ سهولة. والتفكير في ذلك مجرّد وهم.

على الفكرة، كوني مدرّس رياضيات أظنّ أنّ تلك الفكرة مدمّرة. إنها أسطورة مدمّرة جداً في مجال الرياضيات. أي أنّه ثمة بعض الأشخاص الذين يتمتّعون بهذه الموهبة والبعض الآخر لا. وأنّ هذه الأفكار تخطر تلقائياً في الذهن. لا تخطر هكذا أبداً. بل أنّ ابتكارها تأتّى عن اجتهاد كبير.

غالباً ما يرتكب الناس أخطاء. فيعملون على معالجة المسائل. ولا ينجحون في ذلك. وذلك عندما تكون المسألة غير واضحة. لكنّها تتّضح مع مرور الوقت.

أتمنّى أن أتمكّن من إنجاز أمر في هذا المساق، ألا وهو أن أشجّع الناس على تقبّل فكرة مواجهة الصعوبات، وارتكاب الأخطاء، ثمّ إكمال العمل عليها، وأن يُدركوا أنّ الصعوبات هي جزء من عملية النجاح، وأنها تساهم إلى حدّ كبير في حياتك. لأنّك ستواجه صعوبات في كلّ ما تقوم به من أمور، وليس فقط على صعيد المسألة الرياضية هذه.

ستواجه صعوبات في كلّ شيء. عندما تحاول صنع فيلم جديد، أو إنشاء مؤسسة تجارية جديدة، أو حلّ مسألة في حياتك الشخصية. ستواجه صعوبات في كلّ تلك المجالات. وعليك مواجهتها. وإن أدركت أنّ الصعوبات هي جزء من عملية النجاح، ستتمتّع بسلوك مختلف تماماً.

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٥:	استنتاجات حول اللانهاية ١
الموضوع ١:	عدد عناصر المجموعة الخاص بالأعداد الطبيعية والكسور

حسناً. إذاً، بمعنى آخر، يُعتبر الفشل والأخطاء خطواتٍ إيجابية بالغة الأهمية تؤدي إلى النجاح.

نعم.

جيّد، ممتاز. مارشال، كنت تجلس هنا من دون أن تفعل شيئاً. انتعشت ذاكرتك.

أجل.

حسناً. مفهوم.

نعم، انتعشت ذاكرتي.

حسناً. إذاً، الآن يا مارشال، لذا اكتشف سكوت أنّ عدد عناصر المجموعة الخاص بالأعداد الطبيعية هو نفسه عدد عناصر المجموعة الخاص بالأعداد الصحيحة، كل الأعداد الصحيحة، الإيجابية، والسالبة والعدد ٠. صحيح؟

حسناً. مفهوم.

إذاً، الآن، أريدك أن تأخذ على عاتقك مسألةً مشابهة فتعرض لنا لما تُعتبر عدد عناصر المجموعة الخاص بالأعداد الطبيعية ١، ٢،٣، ٤، ٥. مشابه لعدد عناصر المجموعة الخاص بكل الأعداد النسبية. أما بالنسبة إلى الأشخاص الذين يدركون المعنى التقني، فهذه الأعداد الكسرية، كل الأعداد النسبية.

إذا عزمت على إثبات أنّ عدد عناصر المجموعة الخاص بالأعداد الطبيعية مشابه لعدد عناصر المجموعة الخاص بالأعداد الكسرية، الأعداد النسبية، ماذا عليك أن تفعل؟ ما هو الامتحان؟

لقد عرضت أمامي لائحة الأعداد الطبيعية هذه.

صحيح.

إذاً، أفترض أنني في حال استطعت التدوين إلى جانب كل عددٍ كسري-- أنا أريد أن يكون كل عدد كسري في صفّ واحد مع عددٍ طبيعي واحد.

نعم.

وإذا استطعت أن أشمل كل الأعداد، عندها يكون عدد عناصر المجموعة الخاص بها هو نفسه.

نعم.

حسناً، هل أنت متفائل في هذا الصدد؟

على الإطلاق.

على الإطلاق. لست متفائلاً.

صحيح. يبدو الأمر مستحيلاً فثمة الكثير من الأعداد النسبية. ثمة الكثير من الأعداد النسبية. يتعين عليك وضع عدد نسبي إلى جانب العدد ١، والعدد ٢ والعدد ٣.

حسناً.

إذاً، هذا امتحان بمنتهى الصعوبة. ولكن، أريدك أن تبدأ بحلّه.

حسناً.

نعم. بالمناسبة، قد يصعب عليك جداً القيام بذلك. لا أعتقد أنك قادرٌ على فعل ذلك.

نعم. وأنا أيضاً لا أعتقد ذلك.

نعم، حسناً. حسناً. ولكن، لا بأس، لا مشكلة. جلّ ما أريده أن تبدأ في حلّ المسألة.

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٥:	**استنتاجات حول اللانهاية ١**
الموضوع ٢:	**استخدام الجواب الخاطئ للتعلم**

هل تريدني أن أعرض عليك تلميحاً؟

نعم.

حسناً. حسناً، إليك تلميحاً. وهو فعلاً تلميحٌ جيد

لا يمكنك القيام بذلك.

حسناً، هيا بنا. هذا صعبٌ جداً. يستحيل عليك القيام بذلك.

إذاً عوضاً عن ذلك، أريدك أن تدوّن أمراً خاطئاً إلاّ أنك تكون على بيّنة من أنه خاطئ. ولكن، دوّن أمراً خاطئاً. والغرض من ذلك أنك حين تواجه أمراً خاطئاً، تستبدل امتحاناً بآخر.

إذا كنت تواجه أمراً خاطئاً، يمكنك أن تتساءل عن الخطأ الذي يشوبه. في حين أنك إن لم تواجه خطأً ما، فستكون في موقفٍ صعب، تتساءل فيه عن كيفية تدوين الإجابة الصحيحة. وأنا أقول لك الآن، يصعب جداً تدوين الإجابة الصحيحة، ولكن يسهل في الواقع تدوين الإجابة الخاطئة. أو أن تكون الإجابة خاطئة. بالمناسبة، ثمة العديد من الإجابات الخاطئة طبعاً كما هنالك طرقٌ عدة تجعلها خاطئة. لذا، كل ما أطلب منك القيام به هو ابتكار طريقةٍ واحدة لجعلها خاطئة. مفهوم؟

نعم.

حسناً، إذاً ابدأ ودوّن بعض الأمور المنطقية حتى لو كنت تعلم أنها ستبوء بالفشل. هيا حاول.

حسناً، إذا--

طيّب، ممتاز. إذا أخذنا العدد ١ مقسوماً على أي عددٍ طبيعي لن يغطي ذلك العديد من الأعداد الكسرية.

تابع.

حسناً. إذاً، بمعنى آخر، لديك ١/١ مع العدد ١.

نعم. لديك ٢/١ مع العدد ٢. لديك ٣/١ مع العدد ٣. هل ترى ذلك؟ أنا أقوم بالعملية نفسها.

أنت تقوم بالعملية نفسها.

نعم. ٤/١. ٥/١، ٦/١ وهلمّ جرّاً.

حسناً.

الآن وقبل كل شيء، مارشال، هل هذا صحيح؟

كلا. خاطئ.

سكوت، هل هذا صحيح؟

أنا أدرك أنّ هذا خطأ.

جيّد. والآن، سأعرض عليك تلميحاً آخر غير مرتبط بالرياضيات. والتلميح هو: **كن دقيقاً**. ما الخلل الذي يشوب هذا الحل المقترح؟

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٥:	استنتاجات حول اللانهاية ١
الموضوع ٣:	عثرة استراتيجية

حسناً، سأطلب منكما أن تحددا الخلل. إذاً، حين تحاول مطابقة العدد الطبيعي ٢-- كالعدد ١ مقسوم على ٢ مثلاً-- عليك أن تأخذ بالاعتبار العدد ٢ مقسوماً على ٢ كبديل، مثل--
كطريقة أخرى لعرض الأمر نفسه؟

حسناً، لا. إذاً، لديك ١ مقسوم على ١.
١ على ١.
ومن ثمّ، لديك ٢، وهذا ١ مقسوم على ٢. وهذا لا يُعتبر بسط الكسر.
حسناً.
حسناً. مارشال، هل تستطيع أن تحدد الخلل الذي يشوب استراتيجيتك المتبعة؟
ليس لدينا أعداد أكبر من العدد ١ إلى جانب العدد الكسري.
نعم
ونحن بحاجة إلى أعداد أكبر من العدد ١.
حسناً، جيد.
هذا صحيح، ولكن ما هي الأعداد الأخرى الناقصة؟
العدد ٣ مثلاً.
نعم، لا يظهر العدد ٣. صحيح.
أو الأعداد السالبة.

أو الأعداد السالبة. أو الصفر. هل ثمة أعدادٌ أخرى غير ظاهرة؟
ربما.
أنا أعني أنك حين ترى هذا العدد، ١ مقسوم على ١، ١ مقسوم على ١، ٢ على ١، ٣ على ١، ٤ على ١، ٥-- أعطني مثالاً عن عددٍ آخر غير ظاهر.
١ على ٣.
حسناً.
٢ على، كما تعلم، الأمر نفسه-- صحيح؟ إذاً، هذا ما كنت تتحدث عنه، أليس كذلك؟
نعم.

الأعداد النسبية حيث يكون عددٌ خلافاً للعدد ١ في الأعلى. صحيح؟
أي لديك الأعداد النسبية التي تشمل العدد ١ مقسوماً على الأعداد الأخرى-- ١ مقسوم على ١ على ٢، ١ على ٣-- ولكن ليس لديك الأعداد النسبية مع العدد ٢ في الأعلى. أو ٣. أو أي رقمٍ كان.
حسناً.

هذا ممتاز. لقد ذكرت عدداً نسبياً محدداً لم يظهر، ٣/٢ حسناً؟

طيّب، هذا سؤالٌ لك، هل تستطيع تحسين محاولتك ووضع عددٍ نسبي إلى جانب كل عددٍ طبيعي-- هل يمكنك تحسينها لتشمل العدد ٣/٢؟ هل يمكن وضعه في مكانٍ ما؟
يمكنك وضعه كأنه العدد ١ ونقل كل الأعداد إلى الأسفل.

حسناً، يمكنك القيام بذلك. وهل يمكنك التفكير في مكانٍ آخر قد يكون دقيقاً لوضعه فيه؟

بعد ٣/١.
ممتاز.

ثمة أماكن عدة تستطيع وضعه فيها. يمكنك وضعه في المقدمة أو يمكنك وضعه بعد العدد ٣/١، هذا صحيح. إذاً، الآن، سأطلب منك أن تحاول تصحيح هذا الخلل. فإن لم يكن لديك سوى العدد ١ في الأعلى، يُعتبر ذلك خللاً. حاول أن تصحح قدر الإمكان. موافق؟
حسناً.

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٥:	**استنتاجات حول اللانهاية ١**
الموضوع ٤:	**ماهي الكسور التي بإمكانك عدّها بنجاح؟**

حسناً، هذا ممتاز. سأطرح عليك هذا السؤال.

إذاً، يا سكوت، أولاً، اعرض أمامنا ما لديك هنا. كي نعرض أمام الجميع ما لديك. هيا اقرأ بصوتٍ مرتفع.
للرقم الطبيعي ١، لديّ العدد ١ مقسوم على ١. للعدد الطبيعي ٢، لديّ العدد ١ مقسوم على ٢. وللعدد الطبيعي ٣، لديّ العدد ١ مقسوم على ٣. وللعدد الطبيعي ٤، العدد ٢ مقسوم على ٣. للعدد الطبيعي ٥، لديّ العد ١ مقسوم على ٤. للعدد ٦، لديّ ٣ مقسوم على ٤. لأنّ العدد ٢ مقسوم على ٤ كان ٢/١ الذي كان لدينا في السابق.
كان لدينا هذا العدد، نعم.
شكراً.

للعدد الطبيعي ٧، لديّ العدد ١ مقسوم على ٥. ومجدداً، لأنّ العدد ٤ مقسوم على ٤ يساوي العدد ١. صحيح.
العدد ٨ هو ٢ على ٥. العدد ٩ هو ٣ على ٥. العدد هو ٤ على ٥.
عظيم.
ومن ثمّ، لدينا العدد ٦-- تباعاً.

حسناً، سأطرح عليك الآن هذا السؤال. أيّ الأعداد النسبية وضعت في اللائحة هنا؟ هل يمكنك الإجابة على هذا السؤال؟
أيّ-- وكيف ذلك؟ هل تدرك ما هو مستقيم الأعداد؟
نعم، كلها أعدادٌ إيجابية.
كلها أعدادٌ إيجابية. هذا صحيح.
إذاً، ليست أعداداً سالبة. وهل الأعداد كبيرة أم صغيرة؟ ما أكبر عددٍ هنا؟
١.

لن يكون أي عددٍ أكبر من العدد ١. لن يكون أي عددٍ أكبر من العدد ١. لذا، بمعنى آخر، ما فعلته هو أنك الآن تملك كل الأعداد النسبية التي تُعتبر أكبر من العدد ٠ والأعداد الأصغر أو المعادلة للعدد ١. لأنّ العدد ١ مقسوم على العدد ١ يساوي ١. إذاً، لديك كل الأعداد النسبية الإيجابية التي تتراوح بين العددين ٠ و١.
ممتاز.

هذه بدايةٌ جيدة. لسوء الحظ، لديك أعدادٌ نسبية إضافية. نعم، لديّ المزيد منها. لماذا؟ أيّ أعدادٍ منها؟
حسناً، كل الأعداد الأكبر من ١. كل الأعداد الأكبر من ١. وكل الأعداد الأصغر من ٠. الأصغر من ٠. إذاً، يتعين عليك بذل جهدٍ إضافي. إنها كمسألة الأعداد الأصلية والكبيرة حيث في نقطةٍ معينة، تقول إنّ الأعداد الأصلية لديها مساحتها الخاصة ولا تنتقل إلى اللانهاية.

حسناً، وبالمناسبة، هذا ممتاز. حسناً، بالمناسبة، ما فعله سكوت بالغ الأهمية. إذاً، ما فعله هو أنه قال، اسمع لديّ سؤالٌ جديد هنا. إنه سؤالٌ مرتبط بالأعداد الكسرية. لم أتحدث في السابق عن الأعداد الكسرية. ولكن، تحدثت سابقاً عن أمرٍ آخر. وقلت، أتعلم ماذا؟

حين تضع الأعداد الأصلية والأعداد الكبيرة في هذه المساحات، يبدو لي أنه ثمة أمرٌ متشابه هنا. والفكرة بمنتهى البساطة.

تقول، انظر، إذا بدت متشابهة، أتساءل ما إذا كانت تتوفر تقنية مشابهة لحلّ هذه المسألة الرياضية كما اعتُمدت في حلّ المسألة السابقة.

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٥:	استنتاجات حول اللانهاية ١
الموضوع ٥:	تحسين نظريّتنا

حسناً، إذاً ابدأ. كيف ستتمكن من تحقيق تحسّنٍ آخر؟
لديك كل الأعداد النسبية التي تتراوح بين صفر و١.
والآن، ما خطوتك التالية؟
أظنّ العدد الأكبر-- حسناً، يمكنني إمّا اختيار العدد الأكبر أو الأصغر.
بالضبط. إذاً، كيف ستقوم بكل واحدةٍ من هذه؟ كلاكما يواجه المشكلة نفسها، أليس كذلك؟
نعم.
جيد. أخبرني، ما الذي ستعمل عليه بعد ذلك؟
أعتقد أنّ فكرةً جيدة خطرت في بالي بالنسبة إلى الأعداد السالبة.
نعم.
لديه فكرة حول الأعداد السالبة. فلنرَ ما هي. هل نرى ما هي؟
ممتاز.
ما هي فكرتك حول الأعداد السالبة؟
كما فعلنا مع الأعداد الصحيحة، قم فقط باستبدال العدد الإيجابي والسالب.
نعم.
تبدو فكرةً ممتازة.
عظيم. إذاً، ماذا لديك هنا؟
لديّ للعدد الطبيعي ١، ١/١. للعدد ٢، ناقص ١/١.
العدد ٣ هو ٢/١. ٤
هو ناقص ٢/١.
٥ هو ٣/١.
٦ هو ناقص ٣/١.
٧ هو ناقص ٣/٢.
٨، ناقص ٣/٢.
حسناً. أي أنت تستبدل الأعداد الإيجابية والأعداد السالبة. وهذا تحديداً ما كان سكوت يقوله. وكأنها عودة إلى الأعداد الأصلية والأعداد الكبيرة التي تتناوب على المساحة.
إذاً، لقد استخدمت التقنية نفسها مجدداً.
ممتاز.
استخدمت التقنية نفسها مجدداً.
عظيم. ماذا لديك الآن؟
ما الأعداد الكسرية التي تملكها الآن تناظراً مع الأعداد الطبيعية؟
كل الأعداد بين العدد الإيجابي ١ والعدد السالب ١.
نعم. كل الأعداد. باستثناء ٠.

باستثناء ٠.

بالمناسبة، ماذا يمكنك أن تفعل مع العدد ٠؟

يمكننا وضعه في الأعلى.

نضعه في الأعلى.

يمكنك دائماً القيام بذلك. أنت مرتاحٌ جداً حيال هذه الفكرة. لديك عددٌ إضافي. تضعه في الأعلى وتنقل كل الأعداد إلى الأسفل. إذاً، ما الأعداد الباقية؟

كل الأعداد الأكبّر من العدد ١ أو الأصغر من العدد ١ السالب.

وما الذي يجعل عدداً نسبياً أكبر من العدد ١؟

حين يكون بسط الكسر أكبر من مقام الكسر.

صحيح.

الرقم في الأعلى أكبر من الرقم في الأسفل. بسط الكسر أكبر من مقام الكسر.

إذاً، كيف ستحلّ هذه؟ كيف ستحلّ هذه؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٥:	**استنتاجات حول اللانهاية ١**
الموضوع ١.٦:	**استخدام طرائق قديمة لتطوير التفكير**

تقتضي محاولتك الأولى دائماً استخدام الطرق السابقة لأنها سوف تساعدك وتقودك إلى إحراز تقدمٍ كبير. مفهوم؟

والآن، يتعين عليك التفكير في عددٍ معين غير ظاهر. لا تفكر في كل الأعداد.

فكّر في عددٍ واحد، عدد واحد فقط غير ظاهر، أن يكون أكبر من العدد ١ وقرّر أين ستضعه.
٢.
٢، الذي يُعتبر عدداً نسبياً، كيف—٢/١.
٢/١.
نعم. ٢/١.
حسناً.
نعم.

إذاً، لدينا العدد ٢/١، الذي يُعتبر العدد ٢. ٣، في الواقع، يُعتبر العدد ٣ أفضل، ٣ في الأعلى ومن ثمّ العدد ٢ في الأسفل.
حسناً. ممتاز.

نعم، إذاً، هذان نموذجان ممتازان، ٢/١، ٣/٢.
نعم.

بالتالي، سؤالك هو، أين يمكنك أن تضع هذه الأعداد؟

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٥:	استنتاجات حول اللانهاية ١
الموضوع ٢.٦:	استخدام طرائق قديمة لتطوير التفكير - ٢/١

أخبرني يا مارشال، ما هي خطتك بالنسبة إلى المكان الذي يجب فيه وضع الأعداد كعدد ٢/١ و٣/٢ وإلى ما هنالك؟

منذ عمليتي التكرار السابقتين، عندما كانت لدينا الأعداد الإيجابية، اعتمدنا ٢/١، و٣/١، و٣/٢، و٤/١، و٤/٢ و٤/٣ - - أسقطنا ٤/٢ لأنّ العدد كان ٢/١.

نعم، نسيت أن أسقطه مجدداً.

أي عوضاً عن دمج الأعداد السالبة بين كلٍّ من هذه الأعداد، سأقوم بدمج-- تطلق عليها اسم مقلوب عدد؟

مقلوب عدد، صحيح، صحيح.

إذاً ١/١، إذا قلبنا هذا العدد يبقى هو نفسه.٢/١، إذا قلبناه، يصبح العدد ١/٢. ومن ثمّ، نعمد إلى قلب ٣/١، فيصبح العدد ١/٣.

٣/٢، ٢/٣، ٤/١، ١/٤. وبعدها، علينا أن نضيف كل--

حسناً، الآن، إذا أنجزت هذه العملية، ما الأعداد الكسرية التي تحصل عليها؟

آمل أن تكون كلها أعداداً إيجابية.

وهل هي أعداد إيجابية؟ هل رأيت يا سكوت ماذا فعل؟

إذاً، لقد أسقط الأعداد السالبة. لأنه قال-- في الواقع، لمَ قررت إسقاط الأعداد السالبة الآن؟

لقد كانت استراتيجيتنا للأعداد السالبة تقتضي دمج الأعداد بعد شبيهتها الأعداد الإيجابية، لذا، في حال كانت لدينا كل الأعداد الكسرية الإيجابية، سوف نحصل على الأعداد الكسرية السالبة.

نعم.

ممتاز. بمعنى آخر، كنت تعتمد طريقة حيث قلت، إذا كانت لديّ لائحة بالأعداد الإيجابية، أدرك أيضاً كيفية الحصول على الأعداد السالبة.

سأضع واحداً إلى جانب الآخر. أي سيتمحور تركيزي حول الحصول على الأعداد الإيجابية، عندها، أصبح في مراحل متقدمة من عملي. مفهوم؟

هذا ممتاز.

عظيم.

إذاً، اقتضت استراتيجيتك اعتماد مقلوب العدد رأساً على عقب.

كلما كان لديك عدد نسبي، تقلبه رأساً على عقب، فتحصل على الإجابة الصحيحة. عندما ادّعيت أو اقترحت أنّ لائحتك الحالية التي نراها هنا تشمل كل الأعداد الكسرية الإيجابية.

هذا ما آمله.

هذا ما تأمله. حسناً، لمَ يُعتبر ذلك صحيحاً في حال كان صحيحاً؟ لمَ يُعتبر ذلك صحيحاً؟

أعتقد أنه طالما ليس هنالك أي عددٍ كسري إيجابي غير ظاهر، يكون ذلك صحيحاً.

ماذا تحاول أن تثبت هنا؟

أنّ اللائحة التي في حوزتنا تتضمن كل الأعداد الكسرية الإيجابية.

صحيح. أي أنك تطرح على نفسك هذا السؤال، إذا دوّنت عدداً كسرياً إيجابياً، هل سيظهر على اللائحة أم لا؟

نعم.
ولماذا؟ قم بنموذجٍ واحد. اختر عدداً بشكلٍ عشوائي-- اختر عدداً كسرياً إيجابياً على سبيل المزاح.
١٠.
حسناً، اعتقدت أنك ستختار عدداً أكثر تعقيداً--
١٣/٢٥.
١٣/٢٥. عدد عشوائي.
نعم.
أنا أمرّ بيومٍ سيء.
لا، لا، لا بأس العدد ١٠.
لا، لا بأس بالعدد ١٠. بالمناسبة، يجب أن يظهر العدد ١٠. عليه أن يظهر.
عليه أن يظهر. لكنني أفكر في عدد أكثر شموليةً، كالعدد ١٣/٢٥. إذاً، هل سيظهر العدد ١٣/٢٥؟
نعم.
ولماذا؟ حدّد أين تجده. أعني، طبعاً، قد يستغرق بلوغه وقتاً طويلاً، ولكن، لمَ تعتقد أنه هناك؟
في مرحلةٍ سابقة، حين كانت لدينا كل الأرقام بين العدد ٠ و١، أُضيف العدد ٢٥/١٣.
صحيح، لأننا قسمنا كل الأعداد على ٢، وعلى ٣ وعلى ٤، إلى أن بلغنا هذه الأعداد-- إلى ١٣ على ٢٥.
تصل في النهاية إلى العدد ٢٥/١٣.
والآن، لدينا مقلوب العدد. إذاً، سوف تحصل على كل تلك الأعداد. لذا، العدد ظاهر.
هذا صحيح.
أي يظهر كل عددٍ نسبي إيجابي.
ممتاز.
عظيم.

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٥:	**استنتاجات حول اللانهاية ١**
الموضوع ٧:	**متابعة عملية التعلّم**

والآن، كيف نحصل على الأعداد السالبة؟

جدْ لها مكاناً.

إنها طريقةٌ سهلة، نعم.

بالمناسبة، دعني أقل لك أمراً ما.

حسناً.

حين كنت تسعى إلى إثبات أنّ للأعداد الصحيحة الأعداد الاصلية نفسها كالأعداد الطبيعية، لم تقل، نعم، إنها الطريقة السهلة.

لقد عملت حوالي نصف ساعة على حلّ هذه المسألة. والآن، بما أنك أنجزت الكثير، وتقول، هذه هي الطريقة السهلة. وبالمناسبة، هذا صحيح تماماً.

يُعزى السبب في أنّ الناس يعتبرون الأمور بمنتهى السهولة إلى أنه الاختبار نفسه الذي عرضته للتوّ وهو ما يبدو لك مألوفاً. وهذا ما أتقنته.

حالما تصل إلى المرحلة التي تفهم فيها كيفية إنجاز مسألة ما، تُعتبر تلك الطريقة السهلة الطريقة السهلة لإنجاز المسائل. وليس لأنها سهلة، بل لأنك أصبحت على بيّنةٍ منها. وهذا هو الفرق بين الأشخاص الذين يعتبرون المسألة سهلة والأشخاص الآخرين الذين يعتبرونها صعبة.

ذلك أنّ الأشخاص الذين أتقنوا هذه الفكرة آنذاك أصبحوا على بيّنةٍ منها ولهذا السبب يعتبرونها سهلة. هذا مشوق، أليس كذلك؟

إنه بالنسبة لي، من المشوق أنّ الاختلاف الفعلي بين الخبراء وغير الخبراء والأشخاص الذين يعتبرون أنه، من الرائع أن تخطر في بال هذا الشخص هذه الأفكار المذهلة. ولكن فعلاً، في معظم الأحيان، يبدو الشخص الخبير أو الناجح الذي أتقن سابقاً تقنيةً ما وهو يستخدمها وأصبحت حالياً جزءاً من محفظة أعماله الناجحة، ويمكنه تطبيقها عندما تدعو الحاجة.

كجزءٍ من محفظتك للوسائل التي تحلّ هذا النوع من المسائل الرياضية، إذا كانت لديك مجموعتان يمكنك وضع واحدة بعد الأخرى، يمكنك استبدالهما-- ووضعهما هنا. --كما يمكنك وضعها هنا.

أنجزت الأمر.

بالمناسبة، العدد ٠ هو العدد الوحيد الذي لا يتوفر في هذه اللائحة والآن تعلم ما يجب القيام به.

نعم، ضعه فحسب في البداية.

ضعه في البداية وانقل الأعداد الأخرى إلى الأسفل.

إذاً مجدداً، ها قد أصبحت هذه التقنية في محفظتك للتقنيات السهلة. هذا ممتاز بالنسبة لي، ممتاز بالنسبة لي.

حسناً، ها قد أنجز الجميع إحدى نظريات مفهوم اللانهاية الصعب، والذي يشير إلى علاقة واحد لواحد بين الأعداد الطبيعية وكل الأعداد النسبية، وبين الأعداد الكسرية، والأعداد الإيجابية والسالبة والعدد ٠.

عظيم.

نعم.

مفهوم؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٦:	**كرة المناورة – لعبة مشوّقة**
الموضوع ١:	**المزيد من اللانهاية**

أهلًا بك.

نخوض إحدى أعظم المغامرات الفكريّة في التاريخ، وهي استكشاف اللانهاية. قمنا حتّى الآن بخطوة غاية في الأهمّية، وهي أنّنا شرحنا وبوضوح تام ما نقصد بقولنا إنّ مجموعتين تتساويان في الحجم وأطلقنا على ذلك اسمًا مختلفًا بما أنّنا نتعامل مع مجموعات لانهائية، أشرنا إلى أنّ لها عدد عناصر أصلية متساوٍ عدد عناصر أصلية.

يُقال إنّ مجموعتين لديهما عدد عناصر أصلية متساوٍ إذا كان بالإمكان بناء علاقة واحد لواحد بين العنصرين، وتدارسنا هذا المفهوم في حالات عديدة. رأينا على سبيل المثال أنّ الأعداد الطبيعيّة يتساوى عدد عناصرها الأصلية مع الأعداد الصحيحة.

رأينا أنّ عدد العناصر الأصلية في الأعداد الطبيعيّة يتساوى مع عدد العناصر الأصلية للأعداد الكسريّة أي كلّ الكسور. وأجرينا هذه الدراسة بالتركيز على الفكرة الأساسيّة المتمثّلة بأنّ المجموعتين يتساوى عدد عناصرهما الأصلية إذا كان بالإمكان بناء علاقة واحد لواحد بينها.

سنقوم اليوم بإحدى أعظم الخطوات التي قامت بها البشريّة، وهي أخذ مبدأ تساوي عناصر المجموعات الأصلية والتعامل مع اللانهاية ودراسة شيء يبدو أنّه يتخطّى حدود عقل الإنسان وسوف نرى أنّ بعض نتائجها تكاد تكون لا تُصدّق.

ستثبت لنا إنّ أحد الأمور التي يجب أن نقدّرها في حياتنا الفكريّة هي الانفتاح، وحتّى الانفتاح بشأن الأمور التي تبدو غير مفهومة تمامًا. هذا ما سنشهد عليه اليوم.

لن نبدأ أوّلًا بالتفكير في أسئلة هامة بشأن اللانهاية وما إلى ذلك، إنّما سنبدأ بلعبة.

هدفي الحقيقي في الحياة هو أن أصبح ثريًّا، هذا ما أريده فعلًا. وأدرك أنّ في طريقي إلى الثراء عليّ أنّ أخترع لعبة، لذا فعلت.

وأعتقد أنّ هذه اللعبة ستجعلني ثريًّا فعلًا، لذا سأريك إيّاها وسنلعبها معًا، وأعتقد أنّك ستوافقني الرأي بأنّ الجميع في العالم سيرغبون في شراء هذه اللعبة. فلنرَ في كلّ الأحوال إذا كان زملائي يوافقونني الرأي، أودّ أن أعرّفك على الفريق الذي يرافقني اليوم.

هذه جولي، ألقي التحيّة.

مرحبًا.

وهذا سكوت، ألقِ التحيّة.

مرحبًا جميعًا.

سأعرّفكما اليوم، سأعرّفكما يا سكوت وجولي على لعبة، وهي لعبة رائعة. تُسمّى **كرة المناورة**.

حسنًا.

تبدو مشوّقة منذ البداية، صحيح؟

كرة المناورة لعبة لشخصين، لذا ستلعبانها معًا. ولكلّ لاعب لوحته الخاصّة. سأريكما اللوحة ويمكن رؤيتها على الشاشة، هذه لوحة كرة المناورة.

لدى اللاعب الأوّل لوحة ولدى اللاعب الثاني صفّ واحد. تضمّ لوحة اللاعب الأوّل ٦ صفوف و٦ أعمدة. سأعطي كلّا منكما نسخة عن لوحة كرة المناورة. وستوافقانني الرأي بأنّها مشوّقة، إنّها لعبة مشوّقة، مشوّقة فعلًا.

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٦:	**كرة المناورة – لعبة مشوّقة**
الموضوع ٢:	**لعبة كرة المناورة**

سأخبركما كيف تُلعب اللعبة سأطلعكما على القواعد. مستعدّان؟

فلنجعلك يا سكوت اللاعب الأوّل.

حسنًا

أنت اللاعب الأوّل. وأنت ستكونين اللاعب الثاني. إنّها لعبة لشخصين، أحدهما ضدّ الآخر. عندما يحين دورك يا سكوت ستكون خطوتك الأولى أن تملأ الصفّ الأوّل بسلسلة من **x** و **O**.

واعلم أنّ لديك ٦ خانات. يمكنك أن تكتب **x** أو **O** في الخانة الأولى، **x** أو **O** في الخانة الثانية، **x** أو **O** في الخانة الثالثة وهكذا دواليك حتى تملأ الصفّ الأوّل كلّه. هيّا قم بالخطوة الأولى. اكتب **x** أو**O** في الخانة الأولى.

أحسنت. أليست لعبة مشوّقة؟

هذا عظيم. حسنًا.

خطوة ممتازة. جولي، عندما ينتهي دوره يحين دورك. في الواقع، سأضع هذه اللوحة هنا بينكما لأنّكما ستلعبان على الورقة نفسها-- حان دورك الآن. أنظري إلى ما فعله سكوت. واختاري أن تكتبي **x** أو **O** في الخانة الأولى.

ملء ٦ خانات. وستملئين خانة واحدة بـ **x** أو **O** . موافقة؟

ستملأ الآن يا سكوت الصفّ الثاني بسلسلة من **x** و **O**. ألم يبدأ التشويق بالفعل؟

إنّها لعبة ممتعة حقًّا.

أنا لم أخبركما بعد عن هدف اللعبة. وقد أصبحت مشوّقة.

إنّها مشوّقة جدًّا.

بالفعل. صحيح. تماماً.

حان دورك يا جولي، اكتبي **x** أو **O** في الخانة الثانية. تنظرين إلى ما فعله وتكتبين **x** أو **O**.

أجل. جيّد جدًّا. حسنًا.

أعرف أنّ اللعبة مشوّقة بالفعل ولكن لم أخبركما بعد عن هدفها يجب أن أطلع الجميع على هدف اللعبة. وإلّا... قد تكون لعبة جيّدة وحسب. ولكن سيجعلها ذلك لعبة رائعة.

تحمل اللعبة اسم **كرة المناورة**. وذلك لأنّ دورك أيّها اللاعب الثاني، هو أن تناور لتفادي أن يماثل صفّك أيّاً من صفوف اللاعب الأوّل. أي أنّك يا سكوت تملأ الصفوف بسلاسل من **x** و **O** .

وأنت يا جولي تريدين أن يكون صفّك النهائي مختلفًا عن صفّه الأوّل والثاني والثالث والرابع والخامس والسادس. تريدين أن يكون مختلفًا عن كلّ صفوفه الستة. أي لا يجب أن يشابه صفّها أيّ من صفوفك الستّة. أمّا دورك فهو محاولة أن يشابه أحد صفوفك صفّها. مهمّتها هي أن تحاول المناورة. ومهمّتك محاولة أن يتماثل صفّان. مفهوم؟

إذا اختلف صفّك عن كلّ صفوفه الستّة، تفوزين. وإذا ماثل أحد صفوفك صفّها، تفوز أنت.

حسنًا. هل فهمتما؟ نعم؟

هل أنتما مستعدّان؟

أجل.

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٦:	كرة المناورة – لعبة مشوّقة
الموضوع ٣:	لعبة كرة المناورة

الأستاذ: هذا مشوّق.

أجل، إنّه كذلك

حسنًا. لمَ لا تباشر؟ لديك لوحة

لا.

تفضّل.

أعطِه اللوحة لأنّه اللاعب الأوّل. هيّا يا سكوت، ابدأ. اكتب أيّ تسلسل من **X** و**O** في الصفّ الأوّل من لوحتك. لا حاجة إلى تخبئته لأنّك ستريه إيّاه في كلّ الأحوال.

حسنًا.

فلنرَى ما لديك.

OXOXOO.

حسنًا. جيّد جدًّا. هذا هو تسلسل **X** و**O** الذي اخترته. **OXOXOO**.

والآن حان دورك يا جولي، اكتبي **X** أو **O** في الخانة الأولى.

نعم.

كتبت **X**.

حان دورك وأنت تحاول أن تطابق. أي تحاول أن يطابق أحد صفوفك صفّ جولي النهائي الذي لم تكمله بعد وستكمله في سياق اللعبة.

حسنًا.

أحسنت. حان دورك يا جولي. هل ستضعين **X** في الخانة الثانية أم **O**؟ يمكنك وضع رمز واحد في الخانة الثانية. ماذا ستفعلين؟

حسنًا. والآن أخبرني أيّ تسلسل ستكتب هذه المرّة.

الطالب ١: هذا دوري الثالث وسأكتب **X** و**X**.

الأستاذ: لم اخترتَ ذلك؟

الطالب ١: كتبت جولي ٢ **X**.

الأستاذ: وإلامَ تهدف؟

الطالب ١: إلى مطابقة صفّها.

الأستاذ: المطابقة، صحيح. أراد أن يكتب ٢ **X** لأنّه أراد أن يبدأ كما بدأت. والآن ماذا ستختار؟ أخبرني ماذا ستكتب قبل أن تفعل.
الطالب ١: أعتقد أنّني سأكتب **X** آخر.

الأستاذ: حسنًا. اكتبه. وماذا ستكتب في الخانة التالية؟
الطالب ١: سأكتب ٣ **O**.

الأستاذ: ٣ **O**. ٣ **X** ثمّ ٣ **O**. حسنًا. والآن يا جولي، ماذا ستفعلين؟ أليس ذلك مشوّقًا؟
بالتأكيد.

ألا تتخيّلان ملعب كرة قدم يعجّ بالحشود، فيه ما يقارب ١٠٠ ألف شخص ويهتفون مع كلّ خطوة.

الطالب ١: أعترف بأنّ كرة المناورة كانت صعبة في المدرسة الابتدائيّة. هذه اللعبة أسهل.
الأستاذ: حسنًا.

كتبت **O** في هذه الخانة.
نعم.

والآن فلنرَى. أجل، هذه لعبة جديدة. حسنًا. حان دورك. العب وسنبدأ بطرح أسئلة على جولي--
الطالب ١: **XXOXOO**.

الأستاذ: جيّد. والآن يا جولي، قبل أن تخطي خطوتك التالية، أودّ أن تخبرينا عن استراتيجيّتك، عمّا تفكّرين فيه. فلنفكّر جميعنا أيّ دور نفضّل دور اللاعب الأوّل أم اللاعب الثاني. وأيّ استراتيجيّة سنعتمد إذا أدّينا دور اللاعب الأوّل أو اللاعب الثاني من أجل الفوز؟ أيّ دور تفضّلين؟ دور اللاعب الأوّل أم الثاني؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٦:	**كرة المناورة – لعبة مشوّقة**
الموضوع ٤:	**استراتيجية الفوز**

O ، **O** أي**O** ، **O**، **O** ، **X**، **X** و**X** في العمود الأخير.

حسنًا.

ومن ثمّ أضع **O**، لأنّ--

حسنًا.

هل صفّك مختلف عن صفّه الأوّل؟

أجل.

لماذا؟

لقد بدأ بـ **O** فيما بدأت بـ **X**.

صحيح.

هل صفّك مختلف عن صفّه الثاني؟

أجل لأنّ صفّه الثاني، كان خياره الثاني **O** في حين أنّ خياري الثاني كان **X**.

أجل.

هل صفّك مختلف عن صفّه الرابع؟

صفّه الرابع—أجل. لأنّ في صفّه الرابع كتب في العمود الرابع **X**. في حين كتبت في العمود الرابع **O**.

صحيح.

من سيفوز في هذه اللعبة؟

اللاعب الثاني.

أجل.

حسنًا.

حسنًا. سأطرح سؤالاً على الجميع – هل تفضّل أن تكون اللاعب الأوّل أم الثاني؟

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٦:	كرة المناورة – لعبة مشوّقة
الموضوع ٥:	لوحة أكبر ومازال اللاعب الثاني يفوز

ما رأيك يا سكوت؟

أتمنّى لو كان ثمّة طريقة لخداع جولي، ولكن لا أظنّ أنّ باستطاعتي فعل ذلك. أعتقد أنّ أداء اللاعب الثاني أفضل.

حسنًا. هل يمكن أن تحسمي أمرك يا جولي بشأن أي دور تفضّلين أن تؤدّي، دور اللاعب الأوّل أم الثاني؟

بما أنّ اللاعب الأوّل عليه أن يخطو قبل اللاعب الثاني، فهذا الأخير سيسبقه دائمًا بخطوة لأنّه يختار ما سيفعله لاحقًا.

مهما اختار اللاعب الأوّل يمكن للاعب الثاني أن يتهرّب منه. أي أنّ اللاعب الأوّل يحاول باستمرار أن يلحق باللاعب الثاني. ولكن بما أنّ عدد محاولاتهما متساوٍ، لديه فقط 6 محاولات، ولديّ ٦ أعمدة، ٦ خانات، سيظلّ متخلّفًا عنّي بخطوة. وسيحتاج إلى خطوة إضافيّة للحاق بي.

حسنًا. عندما يملأ سكوت صفّه الأوّل سيكتب ٦ **X** و**O** في تسلسل ما. ولملء خانتي الأولى، سأنظر إلى الخانة الأولى في صفّه الأول وسأكتب الرمز المعاكس. لمَ ستفعلين ذلك؟

لأنّني إذا كتبت الرمز نفسه--

لا، لا. لمَ تكتبين العكس؟

لمَ أكتب العكس؟ لأنه عندما يقوم بخياره الثاني--

لا. لماذا تكتبين العكس بمعنى إنّك عندما تفعلين ذلك، ماذا تعرفين بالتأكيد أنّه سيتطابق أو لا يتطابق؟

لأنّني عندما أكتب الرمز المعاكس، أجزم أنّ الخانة الأولى لا تطابق خانتي الأولى.

وبالتالي هدفك هو أن يختلف صفّك عن صفوفه الستّة.

حسنًا. بعد أن كتبت رمزًا معاكسًا لما في خانته الأولى، ممَّ بتّ متأكّدة؟ بشأن صفّك--

من أنّ صفّي سيكون مختلفًا عن صفّه الأوّل.

وجب أن تعرِبي عن تأكيد أكبر. بدلًا من قول، صفّي سيكون مختلفًا عن صفّه الأوّل؟

لا، لا.

تريدين أن تقولي، صفّي سيكون مختلفًا عن صفّه الأوّل.

صحيح.

صحيح؟ بالتأكيد.

لا داعي للتخمين. صحيح؟ صحيح.

حسنًا. ماذا عن صفّه الثاني؟ بمَ يختلف صفّه الثاني عن صفّي؟

أو-- هل يختلف؟ أجل.

لماذا؟ أيّ خانة؟

لأنّه في الخانة الثانية من صفّه الثاني، كتب **O**، فيما كتبت **X**، لذا الصفّان مختلفان.

أجل. ممَّ أنت متأكّدة؟

من أنّ صفّه الثاني سيكون مختلفًا عن صفّي.

حسنًا. أحسنت.

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٧:	**لوحة كرة المناورة اللامتناهية**
الموضوع ١:	**يمكن أن يضمن اللاعب الثاني الفوز دائمًا**

١٠٠ مضروب في ١٠٠ هذا مشوّق.

أنت تكتب ١٠٠ **X** و**O** فيما تكتبين رمزًا واحدًا **X** أو **O**. ثمّ تكتب ١٠٠ **X** و**O** في صفّك الثاني. وتكتبين رمزًا واحدًا **X** أو - **O**ما رأيك؟ ما رأيك؟ هل هذا مشوّق؟

لا أعرف.

كم لدينا من الوقت؟

ربّما ذلك ممكن.

ما رأيك؟

أعتقد أنّ اللاعب الثاني قد يفوز أيضًا.

لماذا؟

لأنّها الفكرة نفسها. مهما كان الصفّ الذي وصل إليه، أنظر إلى ذلك العمود وأضع الرمز المعاكس. إذا كان مثلًا عند الصفّ ٥٤؟ أنظر إلى الرمز في الخانة ٥٤. ثمّ في الخانة ٥٤ في صفّي الأوحد أضع الرمز المعاكس لما كتبه في الخانة ٥٤ من صفّه الـ٥٤.

فهمت.

فإذًا سيكون صفّك مختلفاً عن كلّ صفوفه لأنّ في كلّ صفّ سيكون ثمّة خانة مختلفة. أليس ذلك محزنًا؟

صحيح. هذا مؤسف.

أجل، لأنّني أريد فعلًا أن تنال هذه اللعبة رواجًا. أريد أن أكون غنيًا. أرغب فعلًا في أن أبيع الكثير من هذه الألعاب. ولكن أخشى أنّ اللاعب الثاني يمكنه الفوز دائمًا، سيحدّ ذلك من المبيعات. ماذا ستكتبين هنا؟

دعني—انتظر لحظة! انتظر لحظة. لديّ فكرة. لديّ فكرة عظيمة.

سأعرض فكرتي العظيمة. ماذا عن لوحة مربّعة فيها عدد لا نهائي من الخانات. بدأ الجدّ.

عدد لانهائي من الخانات. أي لديك يا سكوت صفّ لكلّ الأعداد الطبيعيّة. حسنًا؟

لانهاية لها وثقة عدد لانهائي من الأعمدة. عمود لكلّ عدد طبيعيّ، ١، ٢، ٣، ٤، ٥—ولديك صفّ واحد تمتدّ فيه الخانات من ١، ٢، ٣، ٤، ٥ وإلى ما لانهاية. مفهوم؟

نعم.

نلعب الآن اللعبة نفسها. تملأ صفّك الأوّل بتسلسل من **X** و **O**. حسنًا؟

فيما تكتبين رمزًا واحدًا في خانتك الأولى. حسنًا؟

أجل.

ثمّ تملأ صفّك الثاني بتسلسل من **X** و**O** . فيما تكتبين رمزًا واحدًا في خانتك الثانية. صح؟

والآن، من سيفوز، اللاعب الأوّل أم الثاني؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٧:	**لوحة كرة المناورة اللامتناهية**
الموضوع ٢:	**لوحة كرة المناورة اللامتناهية**

ما رأيك؟

أحاول أن أعرف كيف ستنتهي اللعبة، إذا كان عدد الصفوف لانهائي-- نسيت أن أخبرك.
تلعب بوتيرة أسرع. تكتب في نصف الدقيقة الأوّل تسلسلاً من **X** و**O** وتجيبين. من ثمّ لديك ١٥ ثانية لتلعب الدور الثاني وتجيبين. ثمّ يكون لديك ٧ ثوانٍ ونصف الثانية لتلعب الدور التالي، وتجيبين. ويكون لديك ٣ ثوانٍ و٣/٤ الثانية لتلعب الدور التالي، وتجيبين وهكذا دواليك، يُقسم الوقت إلى النصف كلّ مرّة، فتنتهي اللعبة في دقيقة.
حسنًا.

حسنًا. لن نواجه مشكلة أن تستمرّ اللعبة إلى ما لانهاية.

لا تقلق بهذا الشأن. هذا مجرّد تفصيل.

الفرق هو أنّك تلعب بسرعة. ولكن هل سيفوز اللاعب الأوّل أو هل لدى اللاعب الثاني استراتيجيّة فائزة بحيث يفوز دائمًا كما كانت الحال عليه، في اللوحات السابقة التي جرّبناها؟

كان لدى اللاعب الثاني استراتيجيّة تضمن فوزه. والآن؟ هل سيكون لدى اللاعب الثاني استراتيجيّة؟ وإذا أتى ردّك إيجابًا، ما هي؟

سيظلّ برأيي—هل ثمّة طريقة--
السؤال هو، هل سيفوز اللاعب الثاني دائمًا؟
صحيح.
ماذا لو إذا استعملت استراتيجيّتها.
إذا استعملت استراتيجيّتها.

إذا عبثت ستخسر طبعًا. لن يفلح الأمر إذا نسخت صفّك مثلًا. يجب عليها—كان لديها استراتيجيّة ولكنّ السؤال هو، هل ثمّة استراتيجيّة؟

حتّى لو امتدّت صفوف وأعمدة اللوحة إلى ما لانهاية، هل ثمّة استراتيجيّة ستخوّل اللاعب الثاني الفوزَ دائمًا؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٧:	**لوحة كرة المناورة اللامتناهية**
الموضوع ٣:	**اشترِ كلّ التذاكر**

انتظر. انتظر لحظة. انتظر لحظة. تواردت إلى ذهني فكرة عبقريّة.
حسنًا.

لديّ فكرة عبقريّة. ظننت أنّها عبقريّة. سأطلعك على الفكرة. سأطرح عليك سؤالًا. يجب أن تستمرّ في المحاولة. إذا لم ينجح أوّل حلّ، جرّب حلًّا آخر.

لديّ فكرة عبقريّة. ارتكب أخطاء؟ هذه لك يا سكوت. هذه استراتيجيّة للاعب الأوّل؟ موافق؟ هل رغبت يومًا في ربح اليانصيب؟
أجل، طبعًا. أوليس الفوز باليانصيب رائعًا.

بلى بالطبع. سأطلعك على أمر. يُصادف أنّني أعرف كيف يمكنك الفوز باليانصيب هذا الأسبوع. أضمن لك ١٠٠٪ أنّ بإمكانك ربح اليانصيب هذا الأسبوع. هل تعرف كيف؟ هل تعرف كيف؟ هل تعرف كيف؟
أظنّ ذلك.

هل تعرف كيف؟ نعم؟ حسنًا؟ كيف تقوم بذلك يا سكوت؟ كيف تضمن الفوز باليانصيب ١٠٠٪؟ تشتري كلّ التذاكر؟

تشتري كلّ التذاكر. أي لا يستطيع أحد آخر شراء أيّ تذكرة.
غير صحيح.
يمكنهم شراء التذاكر نفسها.
صحيح. ولكن يمكنك شراء كلّ التذاكر.
أجل.

يمكنك شراء كلّ التذاكر. وبالتالي تفوز لأنّك اشتريت كلّ التذاكر. وبالتالي يكون لديك بالتأكيد—فلنجرّب استراتيجيّة شراء كلّ التذاكر. تنجح كلّ مرّة؟
حسنًا، تابع ما يجري.

فلنعد إلى هذه اللعبة. لدينا عدد لا نهائي من الصفوف. لديك عدد لانهائي من الصفوف.
نعم.

حسنًا؟ ما عليك الآن سواء شراء كلّ التذاكر، أي كتابة كلّ تسلسلات **X** و**O** الممكنة، صحيح؟ قُمْ ببناء علاقة واحد لواحد مع أرقام الصفوف، لأنّ عدد الصفوف لانهائي.

صحيح.

تبني علاقة واحد لواحد بين كلّ تسلسلات **X** و**O**. وتبني علاقة واحد لواحد مع أرقام الصفوف لأنّ كليهما لانهائي تملأ الخانات ولا تتبادلان اللوحة بل تملأها. فبما أنّ لديك علاقة واحد لواحد، لن تغفل عن أيّ تسلسل **X** و**O**، صحيح؟ فأنت تقيم علاقة واحد لواحد بين كلّ تسلسل محتمل من **X** و**O** وأرقامك—١، ٢، ٣، ٤، ٥ أي أرقام الصفوف.

أجل.

هل يبدو ذلك جيّدًا؟
أجل.
حسنًا؟ تفاءلت بالخير.

تفاءلت بالخير. تملأ لوحة اللعبة معتمدًا على بناء علاقة واحد لواحد والآن تناولها اللوحة المعبّأة وتقول تفضّلي هل يمكنك قول ذلك؟

تفضّلي! تفضّلي!
تفضّلي! تفضّلي! تفاجأت!
أرأيت؟ ستفوز بهذه اللعبة.
تغمرني السعادة.

تشعر بأنّك ستفوز بهذه اللعبة.
أجل. هل تستسلمين يا جولي؟ هل تقرّين بخسارتك؟
لقد خسرت. لقد فاز. ماذا يمكنني أن أفعل؟

لا
لا؟ لا؟
لا. ماذا ستفعلين؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٧:	**لوحة كرة المناورة اللامتناهية**
الموضوع ٤:	**ما المستحيل؟**

ماذا ستفعلين؟

فلنفترض أنّك ملأت اللوحة. في الواقع لمَ لا تكتب بعض رموز **X** و**O** في أنحاء هذا الجزء كبداية.

حسنًا.

اكتب بعض الرموز—بشكل عشوائي وسريع.

أحسنت.

كلّ الخانات—املأها كلّها. يجب أن تملأ كلّ الخانات ولكن بسرعة. ها أنت ذا.

أحسنت. تمرين قويّ.

ها أنت ذا. أحسنت.

حسنًا. جميل.

لا بأس بك. ها أنت ذا.

حسنًا، أحسنت. لقد ملأ كلّ اللوحة يا جولي. قام ببناء علاقة واحد لواحد وملأ اللوحة. هل تستسلمين؟ هل ستقولين، لا، لا يمكنني فعل ذلك. لا يمكنني. لقد خسرت! لقد خسرت! هل هذا ردّك؟

فكّرت أوّلًا في أنّه كتب كلّ التسلسلات الممكنة هذا ما حاول فعله. كتب تسلسل من **X** و**O** في الصفّ الأوّل والثاني والثالث والرابع والخامس وأعطاك اللوحة. ماذا ستفعلين؟

أقبل الهزيمة..

هل ستقبلين الهزيمة؟ هل هذا ما تريدين فعله؟

لا.

ماذا ستفعلين؟ بمَ ستملئين خانتك الأولى؟

بناءً على هذه المعطيات، سأختار رمزًا.

هيّا. ماذا ستفعلين؟

فلنفترض أنّني اخترت X. لا، انتظر.

والآن ماذا ستفعلين؟

سأفكّر في استراتيجيّة.

هدفك هو أن يختلف صفّك عن كلّ صفوفه.

صحيح.

كيف ستفعلين ذلك؟

سأنظر إلى خانته الأولى.

حسنًا، ضعي علامة تحتها.

ملأ الخانة الأولى في الصفّ الأوّل بـ - -**X**

أجل. --لذا سأختار **O**.

ستكتبين **O** ومن ثمّ؟

في الصفّ الثاني، ملأ الخانة الثانية بـ **X**.

ماذا ستفعلين؟
سأكتب **O**.
لماذا؟

لأنّني بوضع **O** في الخانة الأولى، أضمن أنّ صفّي سيختلف عن صفّه الأوّل. وبوضع **O** في خانتي الثانية، أتأكّد من أنّ صفّي مختلف عن صفّه الثاني.
حسنًا، تابعي.

كتب في الصفّ الثالث **X** لذا أختار **O** وفي الرابع **O**، لذا أختار X. وفي الخامس**O** لذا أختار **X** وفي السادس **O**، لذا أكتب X. وفي السابع **O** لذا أكتب **X** وفي الثامن X، لذا أختار **O**. وهكذا دواليك؟

أجل، إلى آخره. علامّ حصلت الآن؟ على صفّ مختلف عن كلّ صفوفه؟
أجل. أجل.

نحتاج إلى لعبة جديدة كما قلت.

هل نحتاج إلى لعبة جديدة؟ وإنّما انتظر لحظة. ماذا حصل هنا؟

كانت لدينا فكرة اليانصيب. كانت فكرة اليانصيب أن نشتري كلّ التذاكر. أن نبني لكلّ تسلسل من **X** و**O** علاقة واحد لواحد مع أرقام الصفوف. وبالتالي لا يمكن أن تكوني قد كتبت صفًّا غير موجود. لأنّ كلّ الصفوف لديها علاقة واحد لواحد. ما مصدر هذا الصفّ؟ ماذا حصل؟ ماذا يمكننا أن نستنتج؟ ماذا يمكنك أن تستنتج؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٧:	**لوحة كرة المناورة اللامتناهية**
الموضوع ٥:	**ماذا يمكنك أن تستنتج؟**

هذه لحظة مهمّة فنحن نشهد على تناقض.

كانت لدينا فكرة رائعة وهي "استراتيجيّة شراء كلّ التذاكر" لإقامة علاقة واحد لواحد بين أرقام الصفوف ١، ٢، ٣، ٤، ٥ وتسلسلات **X O**. ولكن عندما جرّبتها، أعطيتها اللوحة، وعرفت ما عليك فعله. تمكّنت من تشكيل صفّ غير مطابق لأيّ من صفوفه. لذا ماذا تستنتجين؟ ماذا تستنتج؟

إنّها أكثر أفكار موسّعة للآفاق فكّر فيها بشر.

إنّها فكرة رائعة. ما هي هذه الفكرة؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٧:	**لوحة كرة المناورة اللامتناهية**
الموضوع ٦:	**رموز X و O أكثر من الأعداد**

هل لديك فكرة يا جولي؟ هل يتوضّح لك ما يحصل هنا؟

أخمّن أن الاستراتيجيّة غير ناجحة-- الاستراتيجيّة لا تنجح—
--في حالة اللانهاية. لا تنفع.

نعرف أنّها لا تنفع. لذا ما المستحيل؟ ما الذي عجز عن فعله؟
لم أتمكّن، من مطابقة لوحة جولي أيًّا كانت الظروف.

ما مضمون استراتيجيّة شراء كلّ التذاكر؟ ولماذا فشلت؟ ما المنحى الذي فشل فيه؟ ماذا كانت الاستراتيجيّة؟ على أيّ فكرة استندت؟ ما الذي حاولت فعله؟ ماذا حاول أن--

كانت الفكرة أن يتوصّل إلى كلّ تسلسلات **X** و **O** بحيث مهما كتبت في صفّي سيكون لديه صفّ مطابق. لأنّ لديه كلّ التسلسلات.
هل تمكّن من فعل ذلك؟
لا.

صحيح. لم يتمكّن من فعل ذلك. صحيح؟

كلّ المحاولات التي قام بها، مهما كان تسلسل **X** و**O** تختار تسلسلًا للصفّ الأوّل وتسلسلًا آخر في الصفّ الثاني، وتسلسلًا آخر في الصفّ الثالث والرابع والخامس، إلى ما لانهاية وستجد تسلسلًا لم تستعمله. لم يستطع شراء كلّ التذاكر. عجز عن إقامة علاقة واحد لواحد بين الأعداد الطبيعيّة ومجموعة كلّ تسلسلات **X** و**O**. إلامَ يشير ذلك في ما يتعلّق باللانهاية؟

فكّر بالأمر بهذه الطريقة. متى يتساوى عدد العناصر الأصلية لمجموعتين؟ هل تذكر؟

جوهر ما قمنا به لوصف كيف يتمّ تحليل اللانهاية هو تحديد أنّ عدد العناصر الأصلية للمجموعتين يتساوى إذا كان هناك علاقة واحد لواحد بين العناصر الأصلية لمجموعة والعناصر الأصلية للمجموعة الأخرى.

ما الذي تعلّمنا أنّه مستحيل؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٨:	**حجمان للانهاية**
الموضوع ١:	**بناء علاقة واحد لواحد مستحيلة**

فلنعد إلى اللعبة. فلنعد إلى المحاولة التي كنت تقوم بها كي نعمق فهمنا لها.

كنّا نتدارس فكرة وجود لوحة فيها صف لكلّ عدد طبيعي، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، إلى ما لانهاية. ويتألّف كلّ صفّ من عدد لامتناهٍ من الخانات. الأوّل، الثاني، الثالث، الرابع، الخامس إلى ما لانهاية. وأنت اللاعب الأوْل وكانت فكرتك أن تملأ الصفّ الأوّل بتسلسل من **X O**. فيما تكتب جولي **X** أو **O** في الخانة الأولى من صفّها. ثمّ تملأ الصفّ الثاني بأكمله، فيما تملئين الخانة الثانية فقط، ثمّ تملأ الصفّ الثالث وتكتبين رمزًا في الخانة الثالثة، وهكذا دواليك.

أمّا الاستراتيجيّة العبقريّة التي توصّلت إليها فهي استراتيجيّة ربح اليانصيب. قلت كفى تمريرًا للوحة.
سوف أكتب كلّ تسلسلات **X** و**O** . عدد التسلسلات لانهاية له. ولكن لديّ عدد لامتناهٍ من الصفوف. لذا سأبني علاقة واحد لواحد بين كلّ تسلسلات **X** و**O** المحتملة، وبين أرقام الصفوف--

الصفّ رقم ١، الصفّ رقم ٢-- أملأ الصفّ الأوّل بتسلسل **X** و**O** الذي أعتبره نظيرًا له. وأملأ الصفّ الثاني بتسلسل **X** و**O** النظير له. وكذلك في الصفّ الثالث، وهكذا دواليك. وبالتالي تتلخّص فكرة استراتيجيّة شراء كلّ التذاكر بأنّ كلّ تسلسل بنى علاقة واحد لواحد مع عدد طبيعي، أي رقم أحد الصفوف.

وبذلك تعجز جولي عن إيجاد أيّ تسلسل من **X** و**O** يختلف عن كلّ صفوفك لأنّك استعملتها كلّها، وسيظهر كلّ تسلسل في أحد الصفوف. صح؟
هذه هي فكرتك. هل نجحت استراتيجيّة شراء كلّ التذاكر؟ جولي؟ لا؟
لا. لماذا؟

كان بإمكاني استعمال الاستراتيجيّة نفسها التي اعتمدتها سابقًا، أنظر إلى الخانة الأولى في الصفّ الأوّل وأكتب الرمز المعاكس ثمّ أنظر إلى الخانة الثانية في الصفّ الثاني، وأكتب الرمز المعاكس ثمّ أنظر إلى الخانة الثالثة في الصفّ الثالث وأكتب الرمز المعاكس وهكذا دواليك.

عندئذٍ بماذا يتميّز التسلسل الذي اخترته؟
بأنّه مختلف عن كلّ صفوفه. عن كلّ من صفوفه.
فإذًا هل تمكّن من اعتماد استراتيجيّة شراء كلّ التذاكر؟
لا. فشلت الاستراتيجيّة.

ما الذي فشل فيها؟ لماذا فشلت؟ ما الذي ندرك الآن استحالته؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٨:	**حجمان للانهاية**
الموضوع ٢:	**سؤال بشأن عدد العناصر الأصلية للمجموعة**

ما الذي اكتشفنا استحالته؟

استحال عليه بناء علاقة واحد لواحد بين مجموعة **X** و**O**. ليس فقط مجموعة **X** و**O** وإنّما أيضًا مجموع-- كلّ التسلسلات

التسلسلات، صحيح.

تسلسلات **X** و**O** .

صحيح. ومن ثمّ أرقام الصفوف. وأرقام الصفوف. فلنصغ الخلاصة مجدّدًا.

المستحيل هو بناء علاقة واحد لواحد بين كلّ تسلسلات **X** و**O** بين مجموعة من كلّ تسلسلات **X** و**O** المحتملة وأرقام الصفوف أي الأعداد الطبيعيّة. يستحيل بناء علاقة كهذه عند استحالة بناء علاقة واحد لواحد بين مجموعتين، كيف تصف علاقتهما من حيث عدد العناصر الأصلية؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٨:	**حجمان للانهاية**
الموضوع ٣:	**تملك اللانهاية عدّة أحجام**

لا يتساوى عدد العناصر الأصلية لكلّ تسلسلات **X** و**O** وعدد العناصر الأصلية للأعداد الطبيعيّة هذا صحيح.

هذا صحيح.

هل تعرف ماذا يعني ذلك؟

أنّ للانهاية أحجاماً مختلفة، هذا ما أثبتناه. اللانهاية ليست فكرة واحدة فهي لانهاية.

لا.

تتعدّد أحجام اللانهاية. فلدينا مجموعة لامتناهية من الأعداد الطبيعيّة. ولدينا كلّ تسلسلات **X** و**O** المحتملة وهاتان المجموعتان لا يمكن بناء علاقة واحد لواحد بينهما. وبالتالي للانهاية نفسها أحجام متعدّدة.

يا لها من فكرة. هذا إنجاز رائع برأيي، للعقل البشري.

أن يستوعب اللانهاية إلى حدّ قول إنّنا متأكّدون من أنّ بناء علاقة واحد لواحد البسيطة تفترض من بين نتائجها أنّ اللانهاية نفسها متعدّدة الأحجام. أليس ذلك مذهلًا؟

هذا مذهل فعلًا.

وبالمناسبة، أحد الأمور التي يجب تعلّمها من هذا المساق عمومًا، ومن هذه الفكرة بالتحديد هي أنّنا أحيانًا يجب أن نكون منفتحين. يجب أن نسمح لأنفسنا بالتفكير في الاحتمالات التي تبدو مستحيلة. فكرة تعدّد أحجام اللانهاية في هذه الحالة، بدا استيعابها شبه مستحيل. ومع ذلك أثبتنا يقينًا أنّ للانهاية أحجاماً متعدّدة.

هذا رائع. رائع فعلًا.

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٨:	**حجمان للانهاية**
الموضوع ٤:	**مقارنة بين الأعداد العشريّة والأعداد الطبيعيّة**

سنجيب عن هذا السؤال، وسنعطي مثالًا آخرًا وهو هل ثمّة علاقة واحد لواحد؟ أي هل يتساوى عدد العناصر الأصلية؟

عدد العناصر الأصلية للأعداد الطبيعيّة وعدد العناصر الأصلية للأعداد العشريّة-- الأعداد الحقيقيّة-- الأعداد العشريّة؟

السؤال هو. إذا كتبت-- ويمكننا جميعاً أن نكتب في الصفّ الأوّل-- عمودًا للأعداد الطبيعيّة—١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، إلى ما لانهاية-- ولنفترض أنّني سأضع عددًا عشريًّا إلى جانب العدد ١.

سأختار عددًا عشريًّا بين ٠ و١ فقط كي لا يكون لديّ عدد بعد العشريّ. لا يهمّ، ولكن للتبسيط فقط، سأبدأ دائمًا بالفاصلة العشريّة. وافترض أنّني كتبت عددًا عشريًّا إلى جانب العدد ١. سنختار عددًا عشوائيًّا.

هيّا. اقرأ لي الخانات التي يتألّف منها هذا العدد.

.٧ ٢ ١ ٣ ٧ ٥ ٤ ١ ٠

حسنًا. وسأكتب الآن إلى جانب العدد ٢ عددًا عشريًّا مختلفًا. أخمّن إنّه ٠ أو ١.

حسنًا. ١ ٢ ٤ ٥ ٧ ٣--

جيّد. ولكن، حسنًا.

٩ ٧ ٥. جميل، وهكذا دواليك. تستمرّ الأعداد العشريّة إلى ما لانهاية.

ونكتب عددًا عشريًّا آخر إلى جانب العدد ٣. هيّا. سكوت، هل تريد أن تكتب هذا العدد؟

--٥

حسنًا، ٥.

٢ ٩ ٧ ١ ٣ ٦ ٨ ٧. وهكذا دواليك.

ممتاز. ونكمل على هذا النحو. نكتب أعدادًا عشوائيّة إلى جانب كلّ عدد طبيعيّ. نكتب عددًا عشريًّا.

٧ ٨ ٦ ١ ٣ ٩ ٧ ٤ ٢ إلخ. حسنًا. إلى آخره.

هو، هل يمكن وجود علاقة واحد لواحد بين الأعداد الطبيعيّة وكلّ الأعداد العشريّة بين ٠ و١؟ اي كلّ الأعداد العشريّة التي تبدأ بعدد عشريّ. هل يمكننا بطريقة ما أن نبني علاقة واحد لواحد بحيث يُستعمل كلّ عدد عشريّ؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٨:	**حجمان للانهاية**
الموضوع ٥:	**تطبيق لعبة كرة المناورة على الأعداد العشرية**

السؤال هو فلنفترض أنّنا كتبنا عددًا عشريًّا إلى جانب العدد ١ وعددًا آخر إلى جانب العدد ٢، وآخر إلى جانب العدد ٣. هل يمكننا المتابعة حتى الوصول إلى علاقة واحد لواحد تظهر فيها كلّ الأعداد العشريّة في نهاية المطاف أم لا؟ وهل يمكنك التعليل إذا أجبت بالنفي؟

أوّلًا فلنخمّن. هل تعتقد أن علاقة واحد لواحد ممكنة؟

لا.

لا؟ لا؟

لا.

لا؟ حسنًا. لمَ لا؟ هل يمكن تحديد لمَ تبوء كلّ المحاولات بالفشل؟ هل تريدين التعليل يا جولي؟

بالطبع.

هل تودّ أن تتولّى ذلك؟

أجل، رجاءً.

تفضّلي. تفضّلي يا جولي إذا أردت المحاولة باشري وأرينا ما قد تفعلينه لإثبات أنّ محاولة بناء علاقة واحد لواحد ستفشل.

تريدني أن أكتب عددًا عشريًّا-- حسنًا.

لا، أكملي هذه العبارة.

أن أكتب عددًا عشريًّا لن يظهر في هذه اللائحة؟

صحيح. كلّ ما عليك فعله هو وصف طريقة تمكّنك من التوصّل إلى عدد عشريّ لن يظهر أبدًا وسيكون مختلفًا عن هذا العدد، وهذا العدد، وهذا وذاك إلى آخره. كيف ستفعلين ذلك؟

باستعمال الطريقة نفسها التي اعتمدناها في لعبة كرة المناورة.

تبدو فكرة جيّدة.

سأنظر إلى الخانة الأولى في الصفّ الأوّل--

لمَ لا تضعين خطًّا تحتها؟

--هذا هو العنصر الأوّل.

هذا جيّد.

أرى فيها العدد ٠.

أجل.

كيف يختلف عددي عن الصفّ الأوّل، يجب أن أختار عددًا مختلفًا عن ٠.

جيّد. ماذا ستختارين؟

سأختار العدد ١.

لا، لا تختاري العدد ١. يمكنك اختيار العدد ١. لا تشوبه شائبة. فلنجعل العدد مختلفًا أكثر، هذا كلّ ما في الأمر هل فهمت قصدي؟ لنجعله مختلفًا أكثر. هيّا، اختاري عددًا.

هل ٣ مختلف أكثر؟

أجل، ٣ مختلف. ليس قريبًا حتّى. ١ يلي ٠ مباشرة. فلنجعل العدد مختلفًا أكثر، هذا كلّ ما في الأمر.

من ثمّ أنتقل إلى عموده الثاني وأنظر إلى العنصر الثاني. وأرى العدد ٢.

صحيح. كي تجعلي العدد مختلفًا، اختاري عددًا غير ٢.

سأختار العدد ٧.

٧، جيّد، أحسنت. والعنصر الثالث في الصفّ الثالث هو ٨.

سأختار العدد ٢ فهو مخالف للعدد ٨.

جيّد.

العنصر الرابع في الصفّ الرابع هو ٧.

أجل.

سأختار ٠ المخالف للعدد ٧. والعنصر الخامس في الصفّ الخامس هو ٣. سأكتب رقم ٩ المخالف. وهكذا دواليك. إلى آخره.

أحسنت، أحسنت.

الأسبوع الرابع:	اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية
المحاضرة ٨:	حجمان للانهاية
الموضوع ٦:	عدد العناصر الأصلية للأعداد العشرية والأعداد الطبيعية مختلف

ماذا تعرفين عن العدد العشريّ الذي كتبته مقارنة بالعدد في الصفّ الأوّل؟

إنّ عددي العشريّ مختلف عن العدد الموجود في الصفّ الأوّل. لأنّه ملأ الخانة الأولى بـ ٠ في حين كتبتُ ٣.

هذا صحيح. وهل يختلف عددكِ عن العدد العشري الظاهر في الصفّ ٢؟

أجل.

لماذا؟

لأنّ العنصر الثاني في الصفّ الثاني لديه هو ٢ أمّا عنصري فهو ٧.

عظيم. هل هو مختلف عن الصفّ رقم ١٠٠؟

سيكون كذلك، أجل.

لماذا؟

لأنّني عند الصفّ ١٠٠ سأنظر إلى العنصر رقم ١٠٠ وسأختار عددًا مختلفًا وأكتبه في خانتي المئة.

مذهل. ماذا نستنتج؟

ونحسم بشأن عدد العناصر الأصلية. أنّ عدد العناصر الأصلية للأعداد العشريّة لا يساوي عدد العناصر الأصلية للأعداد الطبيعيّة.

صحيح. لكلّ عدد طبيعيّ-- انتظر لحظة.

حسنًا، سوف أصبح فعلًا-- أوّلًا قبل أن تقول ذلك، سأطلب منه تكراره. سأطلب منك تكراره أوّلًا.

أيّ مجموعة اختلف عدد عناصرها الأصلي وعن أيّ مجموعة؟

مجموعة الأعداد العشريّة. ونتحدّث فقط عن الأعداد العشريّة بين ٠ و١.

مجموعة الأعداد العشريّة بين ٠ و١--

يختلف عدد عناصرها الأصلية عن الأعداد الطبيعيّة بين ١ وما لانهاية. عن الأعداد الطبيعيّة وهي الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ إلى ما لانهاية.

أصبت.

أثبت أنّ أيّ محاولة لبناء علاقة واحد لواحد تبوء بالفشل. لأنّك توصّلت إلى عدد عشريّ بين ٠ و١ لا يمكن أن يطابق العدد في الصفّ الأوّل، الثاني، الرابع، المليون، المليار، التريليون-- لن يطابق أيّاً منها. وبالتالي فهو مختلف.

إنّه عدد مختلف. أليس ذلك متقنًا؟

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٨:	**حجمان للانهاية**
الموضوع ٧:	**إلى اللانهاية وما بعدها**

يرتبط عدد العناصر الأصلية للمجموعات بمقارنة حجمها. لذا يجب أن تخبرني عن مجموعتين ويجب أن تحدّد إذا كان عدد عناصرهما الأصلية متساوياً أم مختلفاً.

حجم مجموعة كلّ الأعداد الطبيعيّة--

حسنًا.

--غير مساو—يختلف حجمها عن كلّ الأعداد العشريّة التي يمكنك تأليفها-- صحيح.

--بين ٠ و١.

أجل.

نستعمل عادة الحجم بدلًا من عدد العناصر الأصلية. عدد العناصر الأصلية للمجموعة. هذا هو المصطلح التقني الذي نستعمله. اخترعنا هذه الكلمة لنعني أنّ بإمكاننا بناء علاقة واحد لواحد وقد أثبتنا أنّنا عاجزون عن ذلك في هذه الحالة. لا يمكن بناء علاقة واحد لواحد بين الأعداد الطبيعيّة ومجموعة كلّ الأعداد العشريّة.

الأعداد العشرية كثيرة للغاية. إنّها كثيرة فعلًا. هناك المزيد منها دائمًا. وقد ألّفت بالمناسبة عددًا عشريًّا إضافيًّا.

هل تظنّ أنّه العدد العشريّ الوحيد الناقص؟

لا. لا.

في الواقع ثمّة أعداد كثيرة، كثير، كثيرة، كثيرة ناقصة. كثيرة، كثيرة ناقصة. لذا ما فعلناه هنا مذهل فعلًا. لأنّ الرحلة التي استكشفناها هي الوصول إلى اللانهاية وما بعدها-- إلى اللانهاية وما بعدها.

تخطّينا اللانهاية بالفعل. تخطّينا لانهاية الأعداد الطبيعيّة لنثبت وجود، لانهايات أكبر فعلًا. ويا له من مفهوم. كانت إحدى الأفكار التي عصي على البشر استيعابها عند اكتشافها، ففي ذلك الحين، فكرة تعدّد أحجام اللانهاية كانت مفهومًا مبهمًا ومع ذلك ما قمنا به اليوم انطلاقًا من لعبة بسيطة ككرة المناورة، تلك اللعبة البسيطة، حمل في أعماقه الدليل على أنّ اللانهاية نفسها متعدّدة الأحجام.

لذا بالنسبة إليّ وكما قلت مسبقًا، هذه صورة مجازيّة. صورة مجازيّة عن رؤية العالم من منظار مختلف. عندما تواجه صعوبة، يمكنك فتح ذهنك أمام كلّ الاحتمالات التي بدت في البدء مستحيلة. تمكّنّا بفضل التفكير المنطقي والواضح أن ندرس فكرة بناء علاقة واحد لواحد البسيطة لندرك أنّ نتائجها يكاد يستحيل استيعابها وخصوصًا فكرة أنّ للانهاية عدّة أحجام.

استمتعنا فعلًا، استمتعت على الأقلّ-- لا أعرف إذا استمتعتما ولكنّني استمتعت بمرافقتكما في هذه الرحلة إلى اللانهاية وما بعدها.

إلى اللقاء في المرّة القادمة.

الأسبوع الرابع:	**اللانهاية – العدّ إلى ما لا نهاية**
المحاضرة ٨:	**حجمان للانهاية**
الموضوع ٨:	**أفكار الأستاذ**

ما الأبعد بخطوة من الأعداد العشريّة؟
أجل.

هذا سؤال مهمّ. إذا وُجد حجم للانهاية، وحجم آخر هل سأخمّن بأن تعدّد أحجام اللانهاية ممكن؟ ما رأيك؟
أجل.
نعم. ممكن.

ثمّة حجم آخر للانهاية وهو أكبر من الأعداد الطبيعيّة. كيف يبدو ذلك؟

يمكنني أن أخبرك كلّ ما يتعلّق بها. أوَتعرف، في الواقع، ثمّة حجم آخر، وآخر. وآخر. هل تعرف كم حجماً يوجد للانهاية؟
عدد لامتناهٍ.
عدد لامتناهٍ. بالطبع.

يوجد عدد لامتناه من الأحجام المختلفة. في الواقع، لا يوجد أكبر-- أرى أنّ دماغك سينفجر. لا يوجد حجم هو الأكبر للانهاية. لكلّ حجم للانهاية حجم أكبر. ثمّة حجم أكبر من أيّ حجم للانهاية. لذا لا يوجد لانهاية هي الكبرى.

ما رأيك بذلك لتوسيع الآفاق؟ أكبر وأكبر وأكبر.
حسنًا.

لا تبكِ يا سكوت. أعتذر.