نص محاضرات الأسبوع السادس من مساق "التفكير الفعّال من خلال الرياضيات"

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ١:	رسم خربشة
الموضوع ١:	اختبار قراءة الأفكار

أهلاً بك، حسناً، كما تعلم، تهدف هذه الحصة إلى مواجهة التحديات في الحياة ومعالجتها بشكلٍ أفضل. ومن بين إحدى الاستراتيجيات التي سوف نتعلمها اليوم استراتيجية التركيز على كيفية معالجتك حالةً معقدة وتقسيمها إلى أجزاء عدة واكتشاف كيفية تركيبها. ومن خلال اكتشاف كيفية تركيب حالة معقدة من أجزاء عدة، عندها سوف تتمكن من معالجة العقدة التي ما كنت لتتمكن من معالجتها لو أنك نظرت إلى المنتج النهائي. إذاً، فلنبدأ باختبارٍ صغير.

سوف يساعدني اليوم شخصان في إجراء هذا الاختبار. الأولى هي جولي، جولي، قولي مرحباً.
مرحباً.
مرحباً.
أهلاً. ها أنت ذا. والآخر هو سكوت.
مرحباً بالجميع.
حسناً، سوف نجري اختباراً. هل أنت مستعد؟
أنا مستعد.
هل أنت مستعدة؟ حسناً، هذا هو الاختبار. وسوف أريك شيئاً. لا يثق الكثيرون بأني أستطيع قراءة الأفكار. ولا أعلم السبب في ذلك ولكن يبدو أني مستبصر. يمكنني قراءة أفكار الناس ومعرفة أمورٍ كثيرة.
نعم، هذا صحيح.
وسوف أعرض ذلك الآن. هذا ما أودّ فعله. سآخذ قلمك وأضعه أينما كان على الورقة، أغمض عينيك. عليك أن تغمض عينيك. وعليك بعدها أن تخربش على الورقة. وتنتظر، فتفتح عينيك لدقيقة وسأقول لك ما أعنيه بخربشة. سأقوم بذلك هنا. سوف أغلق عينيّ وأرسم نوعاً من الخربشة. فيبدو الرسم معقداً على هذا الشكل. ليس أكثر أو أقلّ تعقيداً. على هذا الشكل تماماً. ولكن خربشة عادية.
لم تغمض عينيك ولكني بصراحة غششت قليلاً.
غششت قليلاً. لكني أريدك أن تخربش. أودّ من كل واحدٍ منكم أن يأخذ ورقة ويقوم بالأمر نفسه. لأني أستطيع أن أستبصر حتى من خلال الأثير. إذاً هيّا. مستعد؟ ارسم-- مستعد؟
حسناً، ابدأ. ارسم. ودع الخطوط تتقاطع. ها أنت ذا. ممتاز، هذا يكفي.
هذا يكفي، هذا يكفي. ممتاز، ممتاز.
والآن، هذا ما أريدك أن تقوم به. هذا ما يجول في خاطري.

إنه لغز، ولكني أستطيع فعلاً اكتشاف الحافز الداخلي الذي دفعك إلى رسم هذه الخربشة بالتحديد. وسأكشف لك الطريقة.

الآن، أريدك أن تضع نقطة في كل مكان تقاطعت فيه الخطوط. إذاً، بالمناسبة، تضع نقطة في بداية التقاطع وفي نهايته.

هذان مكانان. ومن ثمّ، ضع نقطة في كل مرة تتقاطع فيها الخطوط. ها نحن ذا.

أصبح لدينا الكثير من النقاط حيث تضع نقطة في كل مرةٍ تتقاطع فيها. وها نحن ذا.

لديّ الكثير من النقاط. حسناً، ممتاز. أعتقد أنّ ذلك كافٍ. هل انتهيت من وضع النقاط؟

حسناً، ممتاز.

آمل أن تكون وضعت كل النقاط.

هذا ما أودّ فعله.

سوف أطلب منك تعداد عدد نقاطك. وسوف نضع جدولاً هنا كي يتم اعتماد الصيغة نفسها. سوف نسمّي هذه نقاطاً وتقوم بتعداد عدد النقاط. وبالمناسبة، أعتقد أنك حين تقوم بالتعداد وتحديداً إذا كان عدد النقاط كبيراً، سوف تفقد التسلسل وقد تنسى نقطةً أو ما شابه. لذا، أقترح عليك أيضاً أن تضع عدداً صغيراً، واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة بمحاذاة النقاط فيما تقوم بتعدادها كي لا تفقد التسلسل.

إذاً، سأضع نقطة بعدد واحد هنا، وعدد اثنين، وثلاثة وإلى ما هنالك. واحرص أيضاً على تعداد النقطة في نهاية القطعة المستقيمة في كل مرة. هل هذا مفهوم؟ كم تملك من النقاط؟

١٩.

وكم كان لديك؟

١١.

١١، حسناً.

وكان لديّ ١٣.

إذاً ضع ٧ لـ١٣. أما الآن فسأطلب منك تعداد الحواف

الحواف هي القطع المستقيمة بين النقاط، بين النقاط. والآن أوصيك مجدداً بوجوب وضع الأعداد بمحاذاتها لأنك سوف تنسى وقد لا ينسى بعضكم. ولكني أقترح أنّ أفضل طريقةٍ تتبعها تقتضي بدء التعداد حالما تبدأ الخربشة وتضع العدد واحد، ومن ثمّ العدد اثنين وثلاثة وكأنك ترسمها. لذا، على سبيل المثال، سأضع العدد واحد هنا والعدد اثنين هنا وإلى ما هنالك.

إذاً ابدأ وعدّد الحواف إليك سؤالاً سريعاً.

نعم.

كيف إذا قمت بدارة كاملة؟--

تُحتسب الدارة الكاملة حافةً واحدة.

واحدة؟ حسناً.

نعم إنها تُحتسب حافةً واحدة. شكراً على هذا السؤال.

آمل أن تتوفر الموسيقى هنا كي يتسنى للناس سماعها.

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ١:	رسم خربشة
الموضوع ٢:	تعداد الأسطح

حسناً، كم لديك؟

.٣٦

.٣٦ إذاً ضعها قرب رأس الشكل الهندسي ٧. ضعها تحت رأس الشكل الهندسي ٧. ضع العدد الذي لديك.

كان لديّ ٢٣.

كم كان لديك يا جولي؟

.١٩

١٩، حسناً. ممتاز. آمل أن تكونا قد نفذتما ذلك بمفردكما. والآن، سوف أطلب منك تعداد المناطق. والمناطق هي كل ما يشتمل عليه الخط الخاص بك. على سبيل المثال، هذه منطقة هنا. وسأحيطها بدائرة كي أتأكد من أنني أقوم بتعداد المناطق. ثمة واحدة، وواحدة أخرى-- اثنتان. وهذه منطقة أخرى-- ثلاث. وسوف أطلب منك القيام بأمرٍ إضافي، بالمناسبة، وهو اعتبار المنطقة الخارجية كمنطقة واحدة. وهو ما يُعتبر خارج نطاق رسمك الكامل. هذه هنا منطقة واحدة. وهذه منطقة أخرى ربما لم تقم بتعدادها. لذا قم بتعدادها أيضاً. حسناً؟

وسنسمّيها F. وفي حالتي، قمت بتعداد ١٢. كم كان لديك؟

كان لديّ ٩.

.٩ نسيت واحدة. حسناً، جيد. أرأيت؟ يسهل نسيانها. عليك أن تقوم بتعدادها كاملةً. إذاً لديك ١٠.

.١٨

١٨؟

نعم، في حال احتسبت المنطقة الخارجية.

١٨؟

أعتقد-- هل نسيت إحداها؟

نعم، لعلّك-- هل احتسبت تلك الصغيرة الرفيعة هناك؟

نعم.

تلك.

تلك؟ هل هذه هي؟ إنه خط يشير إلى ١١.

١١ هي تلك المنطقة الصغيرة هناك.

حسناً.

.١١

نعم، لا أعتقد أنّ حسابك كان صحيحاً.

١٣، ١٤. ها نحن ذا. نسيت واحدة. وهذه هي. المجموع هو ١٩.

المجموع ١٩؟

نعم.

نعم. يبدو هذا جيداً.

حسناً، هذا هو استبصاري السحري. رأيت ذلك؟

أفكر في ما فعلت. أو لعلّه تحريك ذهني أي أنني أستطيع تحريك هذا القلم لجعل الحساب صحيحاً. حتى قلمك.
إذاً، هذا ما سأطلب منك فعله. أريدك أن تأخذ عدد رؤوس الأشكال الهندسية V، وتطرح عدد الحواف أي E وتضيف عدد الأسطح F فتكتشف العدد الذي حصلت عليه. اكتشف ما تحصل عليه. V ناقص E زائد F . ولا تكشف لي الإجابة.

لا تكشف لي الإجابة. انتظر، أعتقد أنني أرى الإجابة في ذهني. سأكتشفها.

انتظر، أعتقد أنه سحر. هل حصلت على عدد ٢؟ هل حصلت عليه، هل حصلت على عدد ٢؟

نعم طبعاً.

هل حصلت على عدد ٢؟

هل حصلت على ٢؟

نعم حصلت أيضاً على عدد ٢.

رائع.

أليس هذا مذهلاً؟ أليس هذا أمراً غريباً؟

ما الذي يحصل هنا؟

هذا أمرٌ رائع.

إذاً، حصلنا كلنا على عدد ٢.

حصلت على ٢. وبالمناسبة، إن لم تحصل على العدد ٢ فقد أسأت العدّ. أساء البعض منكم العدّ. إذاً حصلت على العدد ٢.

حسناً، في الواقع، قد تعتقد أنّ المسألة مسألة ذكاء. أراهن أنك اعتقدت أنها مسألة سحر.

هل اعتقدت أنه سحر؟

سكوت، سحر؟

أنا مذهول فعلاً.

أنت مذهول.

سحر؟

نعم، أنا لا أقوى على التعبير.

لا تقوى على التعبير؟ حسناً.

حسناً، يبدو أنّ العملية ليست سحراً. إنها الرياضيات.

نعم، إنها الرياضيات وهي أفضل من السحر. حتى أفضل من ذلك.

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ١:	رسم خربشة
الموضوع ٣:	تحليل المركّب

في الواقع، كلما رسمت شيئاً كهذا، بغضّ النظر عن شكله، أو عدد مناطقه أو عدد نقاط التقاطع فيه، تحصل دائماً على العدد ٢ كنتيجة.

حين تأخذ رؤوس الأشكال الهندسية وهي نقاط التقاطع بالإضافة إلى نهاياتها، وحين تأخذ الحواف، وتطرح عدد الحواف، ومن ثمّ تضيف عدد المناطق، سوف تحصل دائماً على العدد ٢ كنتيجة.

بالمناسبة، كانت هذه نظرية عالم رياضيات يُدعى ليونهارت أويلر وهو كان عالمَ رياضيات ذائع الصيت في القرن الثامن عشر. وخطرت هذه الفكرة في باله. أنك تحصل دائماً على العدد ٢ كنتيجة.
أما سؤالي لك الآن فهو التالي-- وهنا، يبدأ تفكيرنا--
السؤال هو كيف تستطيع إثبات حصولك دائماً على العدد ٢؟

مهما كان رسمك تحصل دائماً على العدد ٢. ما الطريقة التي تعتمدها لتفكر بهذه الطريقة إذ ثمة العديد من الأشكال. وقد تجسد الأشكال صوراً لم تحلم بها حتى حين كنت ترسم على هذه الورقة.
وفي الواقع، قد تشتمل على مليون نقطة تقاطع. مليون أو مليار نقطة تقاطع.
حسناً.

وطبعاً، لن تتمكن من إنجازها باستخدام قلم ولكن نظرياً، قد تتضمن مليار نقطة تقاطع في مناطق عدة. إذاً، كيف تتأكد من أنك ستحصل دائماً على العدد ٢؟

إذاً، هذا هو الامتحان الذي يجب أن تعالجه. كيف ستقوم بتحليل هذا المركّب-- أو قد يكون مركّباً بشكلٍ اعتباطيّ-- كيف ستتمكن من معالجة ذلك واكتشاف السبب الذي يفضي دائماً إلى العدد ٢؟

لذا، فكّر جيداً.

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ١:	**رسم خربشة**
الموضوع ٤:	**البدء من الأساسيات**

إنّ أبسط أمرٍ قد توكّل بتنفيذه هو أن تكون لديك نقطة انطلاق ونقطة توقف.
حسناً. هذا أبسط ما يكون.
نعم. أو تستطيع، حسناً -- أعتقد أنّ هذه نقطةٌ جيدة للبدء.
ممتاز. رائع. ما رأيك أن نبدأ من هنا؟
حسناً، موافق.
أولاً، سأقول شيئاً. هل سمعت ما قاله سكوت؟
نعم. هل تعتقد أنها فكرةٌ جيدة؟
نعم. نعم. لمَ تعتقد أنها فكرةٌ جيدة؟
لأنّ البدء من أمرٍ مركّب صعبٌ جداً. وبرأيي يسهل البدء من الأساسيات والبناء عليها تدريجياً. البناء عليها تدريجياً، نعم. إذاً، هذه إحدى استراتيجيات فهم الحالات المركّبة. وهي قيّمة جداً. وهي ذات فائدة في كل مجالات الحياة، ليست مجرّد رياضيات. لاسيّما في حال أدركت كيفية البناء على الأمور وكيفية بروز التركيب في كل خطوة عندها، تستطيع أن تقول حسناً إذا استطعت إثبات السبب خلال البناء عليها يكون بعض المزايا صحيحاً وعندها ربما تستطيع إثبات أنها ستكون صحيحة على الدوام. مهما كان تركيبك للمنتج النهائي.
نعم. حسناً، ابدأ وهذه نقطةٌ ممتازة للانطلاق. حاول أن تأخذ ورقةً أخرى وتبدأ كما بادرت سابقاً. كما اقترحت. قلت إنه عليّ الرسم حيث لديّ قطعةٌ مستقيمة واحدة. للقطعة نقطة انطلاق واحدة ونقطة انتهاء. والآن، ماذا ستفعل بها؟
حسناً لنقم بتعدادها بالطريقة نفسها.
تماماً. ممتاز. قم بتعدادها بالطريقة نفسها.
إذاً لدينا - -B رؤوس الأشكال الهندسية-- وبالمناسبة، بما أنك ستغير هذه في وقتٍ ما، قد ترغب في الرسم بمكانٍ ما وتسجيل عملك في مكانٍ ما حيث يمكنك مراقبة تطوره. لذا لا أعلم. غالباً ما أكتبها من الجانب v. ناقص e زائد f يساوي.
إذاً، في هذه الحالة، كم تملك من رؤوس الأشكال الهندسية؟ حصلنا على ٢.
اثنان. وكم حافة؟ واحدة.
وكم منطقة؟ واحدة فقط.
واحدة فقط.
واحدة. وما نتيجة V ناقص E زائد F؟ ٢؟
٢. آمل أن يكون العدد ٢.
وهو كذلك.
هو كذلك. رأسان شكلان هندسيان ناقص حافة واحدة. أي واحد زائد سطح واحد.
١ زائد ١ يساوي ٢. ممتاز.
ممتاز. حسناً، ماذا ستفعل الآن؟

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٢:	**تعداد المزايا**
الموضوع ١:	**هل مازالت النتيجة ٢؟**

يمكننا إمّا إضافة نقطة أخرى كما في حال القطعة المستقيمة.

حسناً، نعم. يمكنك القيام بذلك.

أو يمكننا الاستمرار في ذلك واعتماد التقاطع.

نعم. إذاً، يمكننا اختيار أحد الحلّين لأنك في كلتا الحالتين تحصل على النتيجة نفسها.

بطريقةٍ ما، أستطيع-- حسناً.

لا يهمّ. يمكننا القيام بما تريد. فلنرسم قطعةً مستقيمة أخرى. ولكن، هل نجعلها تتقاطع؟ هذه هي المسألة.

هذه مسألة. لنرسم قطعةً مستقيمة أخرى فحسب. إذاً، قطعة مستقيمة، قطعة مستقيمة؟

نعم. حسناً. اربطها بالقطعة السابقة. حسناً. نعم.

حسناً. إذاً، لدينا ثلاثة رؤوس أشكال هندسية. لدينا حافتان. وما زال لدينا منطقة واحدة.

حسناً. ما زالت النتيجة ٢.

ما زالت النتيجة ٢. نحن نسير على الطريق الصحيح. حسناً، وحين قمت بذلك، هل أدركت، إذا جاز التعبير، لما ما زالت النتيجة ٢.

أرى أنّ هذا صحيح. ولكن ما أعنيه، حين فكرت في إضافة هذه الحافة الإضافية، هل أدركت بطريقةٍ ما لمَ V ناقص E زائد F تساوي ٢؟

حسناً، لأنك تضيف حافةً واحدة ورأس شكل هندسي واحداً.

نعم. وبما أنك تطرح ١ من الأخرى كأنك تضيف ١ إلى كليهما فهي تُلغى.

ممتاز. ممتاز.

ممتاز. حسناً. قد تعمد إلى تجربة-- أي ما اقترحته في السابق. قطعة مستقيمة أخرى تتقاطع؟

حسناً، لا. إضافة رأس شكل هندسي-- وسط قطعة؟

نعم. نعم.

نعم. ماذا يحدث في حال أضفت رأس شكل هندسي وسط إحدى الحواف.

حسناً، قد يكون الأمر نفسه. لديك حافة قائمة لها نقطة انتهاء. إذاً نقطتا انتهاء ورأسا شكلين هندسيين. ومن ثمّ، تقوم بتقسيم هذه الحافة إلى ٢، لذا يصبح عدد ١ عدد ٢. وعوضاً عن نقطتي انتهاء، لديك الآن ثلاث. لذا أنت تضيف عدد ١ إلى كلتيهما. إذاً، في النهاية، لن يكون للطرح أي تأثير.

حسناً. سكوت، هل فهمت ذلك؟

نعم. وما زالت النتيجة هي نفسها.

وما زالت النتيجة هي نفسها. حسناً.

إذا أضفت رأس شكلٍ هندسي وسط الحافة، تصبح حافتين وحافة إضافية. وقد أضفت رأس الشكل الهندسي الآخر. إذاً، يزيد عدد رؤوس الأشكال الهندسية واحداً. وبما أنك تلجأ إلى معادلة V ناقص E، فإنّ المجموع سيبقى هو نفسه.

ممتاز. حسناً. والآن ماذا؟

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٢:	**تعداد المزايا**
الموضوع ٢:	**ابتكار سطح**

والآن فلنجعل الخطوط تتقاطع ولنستمتع بذلك.
حسناً.
هل يبدو ذلك مناسباً برأيك؟
نعم.
حسناً. هل تريد أن-- لا أعلم كيف تبدو صورتك، ولكن بالنسبة إلى صورتي، أرغب في ربط رأس شكلين هندسيين وإنشاء منطقة أخرى.
صحيح. جيد. إذاً، هل علينا القيام بذلك؟
نعم. هيا بنا.
حسناً. إذاً، أنت تضيف حافة تتقاطع بين رأس شكلين هندسيين قائمين.
نعم. حسناً. والآن، ماذا سيحدث؟
ما زال لدينا أربعة رؤوس أشكال هندسية.
ولمَ لم يتغير ذلك؟
لأنّ الحافة التي ربطناها برؤوس الأشكال الهندسية القائمة لم نقم بإنشاء رأس شكلٍ هندسي جديداً.
صحيح. لا يتوفر رأس شكلٍ هندسي جديد.
أنت تضيف حافة بين رأس شكلين هندسيين كانا لديك في الأصل. إذاً، لم يتغير عدد رؤوس الأشكال الهندسية في هذه الحالة.
لا. طيّب. والآن ماذا؟
ولكننا أضفنا حافةً أخرى. نعم.
ومن ثمّ، ومن خلال إضافة تلك الحافة، أنشأنا منطقةً أخرى. صحيح.
صحيح. وبالمناسبة، كيف تعلم أنك أنشأت منطقةً أخرى، أنك أنشأت منطقةً أخرى؟ هل تعلم ذلك؟ لمَ أنشأت منطقةً أخرى؟ كيف تم إنشاء منطقة جديدة؟ هل أنه حيثما-- إذاً، لم نقم بإنشاء رأس شكل هندسي جديد.
لقد ربطنا رأس شكلين هندسيين قائمين. وهذا ما ربطهما معاً نوعاً ما. ولكن في حال رأس شكلٍ هندسي جديد، قد تحدث ثغرة. لأنّ الرأس الجديد قد يرتبط فقط بالرأس الذي بدأت التوسع منه، وليس أي رأسٍ قائم آخر.
حسناً.
إذاً، في حال كنت تربط رأس شكلين هندسيين قائمين-- صحيح؟
إذاً، هذا ما قلته. إذا هذا ما فعلت، رأس الشكل الهندسي هذا وذلك كانا قائمين بذاتهما، أي أنهما كانا جزءاً من هذا الشيء المربوط الذي كنت تملكه. إذاً، يمكنك العبور من رأسٍ إلى آخر من خلال هذا المسار. ومن ثمّ، أضفت هذه الحافة هنا. إذاً، ماذا أنشأت؟ منطقة؟
نعم. لقد أنشأت منطقة. لقد أغلقت منطقة.
نعم. لقد أنشأت فعلاً ما يُسمّى خطّ منحنى مغلق بسيطاً. إنه خط منحنى يقطع-- يقسم المنطقة إلى قسمين، لأنها مرتبطة على هذا الشكل.
إنها مرتبطة أيضاً على هذا الشكل. إذاً، لديك شيءٌ منفصل.

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٢:	**تعداد المزايا**
الموضوع ٣:	**إضافة قطع جديدة إلى الخربشة**

حسناً، لمَ ما زالت معادلة V ناقص E زائد F تساوي ٢؟
لأنّه، تبقى رؤوس الأشكال الهندسية نفسها لأننا ربطنا راس شكلٍ هندسي قائم
نعم، هذا صحيح. ولكن، بما أننا ربطنا رؤوس الأشكال الهندسية القائمة، أضفنا حافةً أخرى.
نعم.
وبإضافتنا هذه الحافة الأخرى، أضفنا منطقةً أخرى.
نعم، نعم.
وبما أنه يتم الطرح والإضافة من جديد فهي تُلغى.
حسناً.
حسناً. إذاً--
نعم؟ ما النتيجة التي نستخلصها هنا؟
حسناً، أننا--
في حال-- هيا تابع.
أنت أولاً.
لا، لا. ابدأ أنت.
أرجوك، أرجوك، أرجوك.
حسناً، أردت أن أقول إنّ الطريقة الوحيدة التي لا تؤدي إلى نتيجة ٢ هي بإضافة شيئين أضيفا إلى المجموع.
إذاً، في هذه الحالة، إذا أضفنا رأس شكلٍ هندسي وسطحاً، لن نحصل على نتيجة ٢.
حسناً، بدل أن نكون سلبيين ولكن، حين قلت ما كان يمكن أن يحصل إلاّ أنه لم يحصل أخبرني ما حصل فعلاً.
إذاً كلما-- نعم، ماذا، ماذا أضفت وماذا حصل عندما أضفت؟
كلما أضفت حافة--
حسناً.
وجب عليك إمّا أن تنشئ رأس شكلٍ هندسي آخر--
حسناً. أو تنشئ منطقةً أخرى في خضمّ عملية إنشاء تلك الحافة.
حسناً.
حسناً.

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٢:	تعداد المزايا
الموضوع ٤:	كان أويلر شخصاً بمنتهى الذكاء

إذاً سكوت، الآن قلت بوضوح ما--
لمَ أنت-- بالمناسبة، هل أنت واثق كلياً بأنه مهما كانت صورتك معقدة، سوف تحصل دائماً على معادلة v ناقص e زائد f التي تساوي ٢؟ هل أنت واثق أم لا؟
أنا واثق من ذلك مئة بالمئة.
فعلاً؟

كان أويلر شخصاً بمنتهى الذكاء. وهذا ليس سبباً كافياً لتكون واثقاً إلى هذه الدرجة. إذا كنت ملمًّا بالمنطق، فستكون واثقاً جداً.
نعم.
حسناً، إذاً حاول أن تشرح بطريقة مميزة قدر الإمكان.
نعم، سأشرح.
هيا.

إذاً كلما أنشأت حافةً جديدة، سواء كانت بين نقطتين، أو ثلاث نقاط أو أربع-- ولكن دعنا نكتفِ الآن بهذه. كلما أنشأت حافة، تنشئ إمّا منطقة جديدة أو رأس شكلٍ هندسي جديد. ولكن يستحيل أن تكون كلتا الحالتين معاً.
انتظر لحظة.

حسناً، فلنبدأ بهذه. ولكنّ أحدهما مستقل عن الآخر، في كل مرةٍ تنشئ فيها رأس شكلٍ هندسي. والآن، سوف أدلي بتعليق حول-- سكوت، هذا رائع، هذا رائع.

في معظم الأحيان، إذا كنت تتعلّم أمراً ما-- إذا كان أحدنا يتعلّم أمراً ما-- تخلص إلى إدراكٍ جزئي. تدرك السبب الذي يجعله صحيحاً. فتشعر أنك تفهمه جيداً.
أفهمه بالكامل.

ولكن ما يحدث فعلاً أنك لست واضحاً ١٠٠ بالمئة. لست واضحاً بما فيه الكفاية. أنت تملك فكرةً عامة أو بالأحرى فكرةً محددة. ولكن لا يمكنك تحديدها فعلاً.

إن إحدى الطرق المفضية إلى النجاح والتي تُعتبر صحيحةً من حيث الممارسة، والتي تفتح أمامك آفاق النجاح، هي الحرص على تحديد الأمور بعد إدراكها أو بعد اعتقادك بأنك تدركها.

أن تتكبد العناء وتسأل نفسك إذا كنت تفهم كل حالة. هل أفهم تماماً كيفية شرحها؟
وفي حال بدأت الشرح وساد الغموض. هذا ما فعلته للتوّ.

قلت حسناً، أضفت حافة ومن ثمّ-- ولكن، انتظر، هل هنالك رأس شكلين هندسيين؟ وأمسى الشرح غامضاً قليلاً. في حوزتك الفكرة الصحيحة نوعاً ما. ولكن، الآن، عليك أن تنتقل إلى مستوى أعلى من الدقة. وفي حال اعتدت الانتقال إلى هذا المستوى من الدقة، في معالجة الأمور التي تعتقد أنك تعرفها أو التي تعرفها بالفعل وبالتالي تكرارها لنفسك أو لشخصٍ آخر وتحديدها بالفعل وإيضاحها، عندها فقط تنتقل من حالة الإدراك الضعيف نوعاً ما وغير المجدي إلى الإدراك القوي الذي قد يشكل نقطة انطلاقٍ مهمة بالنسبة لك. ويمكنك عندها التقدم وتعلّم المزيد.

إذاً، يُعتبر هذا المستوى العالي من الدقة وإلزام نفسك على الانتقال إلى هذا المستوى منها ممارسةً قيّمة إلى حدٍّ كبير. ويمكنك استخدامها في كل المجالات. إذا كنت مثلاً تعمل ضمن شركة، تعمل ضمن شركة وكنت ملمًّا بشتّى الأمور، أي بكيفية العمل في الشركة وبالوظائف والموظفين. عندها تجد، حسناً، هل أفهم فعلاً السبب وراء إجراء عمليات التصنيع بهذه الطريقة؟ أو أنّ ذلك فقط، نعم، وافقت على ذلك نوعاً ما وكان الأمر غامضاً.

إن تكبدت العناء في فهمها بطريقة محددة، فهذه هي الخطوة التي تفسح لك المجال لتكون مبتكراً وإبداعياً. إذاً، هذه صورة رائعة هنا. فلنبدأ العمل ونرَ إن كان باستطاعتنا القيام بذلك في هذه الحالة ونشعر بأننا حققنا هدفاً ما وبالرضى حالما ننجز العمل.

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٢:	تعداد المزايا
الموضوع ٥:	وصف الحالة

إذاً، يا جولي، هل تريدين المحاولة؟ اشرحي السبب الذي يجعلنا نحصل دائماً على النتيجة ٢.

حسناً.

وبالمناسبة، حين تقولين إننا سوف نحصل دائماً على النتيجة ٢، لم تصفي فعلاً ما هي الحالة التي تفضي إلى النتيجة ٢ إذا قمت بهذه المعادلة وإذا بدأت بأمرٍ معين وهلمّ جرّا.

حسناً.

إذاً، لديك هذه الورقة البيضاء.

حسناً، ورقة حسناً. ويمكنك رسم الحواف، أنت ترسمين الحواف. ونقول إنك كلما رسمت حافة أو حافتين أو عدداً معيناً من الحواف، وإذا قمت بتعداد رؤوس الأشكال الهندسية وطرحت عدد الحواف في رسمك وأضفت عدد المناطق، سوف تفضي النتيجة دائماً إلى عدد ٢.

إذاً، تشتمل الحافة على نقطتين، صحيح؟

حسناً، إنه على شكل قوس أو ربما يمكنه الالتفاف على نفسه، إنها حلقة تكرار ولكنها حافة.

حسناً، إذا أنشأت حافةً فقط وليس حلقة تكرار، حافةً واحدة، ستحصل على الحافة التي تشمل رأس شكلين هندسيين. قد لا يؤدي بك الأمر إلى إنشاء منطقةٍ أخرى، ولكن أساساً، سوف ترسم حافةً واحدة فقط وتحصل على—

هل أنت، دعني أفهم الأمر، دعني أفهم الأمر. هل تبدأ باستخدام ورقةٍ بيضاء؟

نعم.

حسناً، إلامَ تعمد في البدء؟ ترسم حافة واحدة.

حافة واحدة، حسناً. في الواقع، أظنّ أنّ هنالك طريقتين لرسم هذه الحافة.

يمكنك رسم حلقة تكرار. لحلقة التكرار مسارٌ واحد. أو خط واحد.

أو خط، حسناً.

إذاً، إذا كان لديك حافة واحدة، قد تكون حلقة تكرار أو قطعة مستقيمة لها نقطتا انتهاء. بالمناسبة، هل تنجح هاتان الطريقتان؟ من حيث المعادلة التي تقول إنّ رؤوس الأشكال الهندسية ناقص الحواف زائد المناطق تساوي اثنين؟

إذا كان لديك حلقة تكرار، سوف تحصل على رأس شكلٍ هندسي واحد، وحافة واحدة ومنطقتين لأنّ حلقة التكرار الخاصة بك أنشأت منطقة ولديك أيضاً هذه المنطقة الخارجية فتكون المعادلة ١ ناقص ١ زائد ٢ يساوي ٢. وإذا رسمت خطاً تحصل على رأس شكلين هندسيين، وحافة واحدة ومنطقة واحدة، لذا ما زالت معادلة ٢ ناقص ١ زائد ١ تساوي ٢.

حسناً، جيد، حسناً.

إذاً حين تحصل على حافة واحدة تكون واثقاً بأنّ V ناقص U زائد F يساوي ٢. رؤوس الأشكال الهندسية ناقص الحواف زائد المناطق يساوي اثنين. حسناً.

لذا، يجب أن يكون لكل خط نقطة انطلاق ونقطة انتهاء. وكأننا في حال أردنا—

كحافة تقصد؟

نعم، لكل حافة بنقطة انطلاق وانتهاء، أو لكل نقطة انطلاق وانتهاء.

حسناً، هذا الجزء الأول، عندما نوضح أنه يستحيل على الأشكال كلها أن تكتسب هذه الخصائص حسناً، أنت تقول إنك تبدأ بالحالة الأسهل. أبسط حالة أساسية لكل خط بنقطة انطلاق ونقطة انتهاء. لكل حافة واحدة تتحدث عنها؟

نعم.

حسناً، ممتاز.

حسناً، إذا كان لديك حافة واحدة في نقطة انطلاق وانتهاء واحدة، عندها V ناقص E زائد F يساوي اثنين. وكما قلت، أو حلقة تكرار تُعتبر حافة واحدة إلاّ أنها تشمل رأس شكلٍ هندسي واحداً. وهذا صحيح أيضاً، V ناقص E زائد F يساوي اثنين.

حسناً.

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٢:	**تعداد المزايا**
الموضوع ٦:	**اكتشاف كل الإمكانات**

كيف حالك سكوت؟

أنا بخير.

ماذا تفعل؟ ماذا تفعل؟

كلها، بدءاً من قطعةٍ مستقيمة واحدة والمواصلة أساساً من هناك، حسناً، لكل قطعةٍ مستقيمة لديك رأس شكلين هندسيين، وحافة واحدة ومنطقة واحدة. ومن تلك القطعة المستقيمة، رسمت قطعةً أخرى. إذاً، أصبح لديّ ثلاثة رؤوس أشكال هندسية، وحافتان ومنطقة واحدة. ومن ثمّ، رسمت قطعةً أخرى من حيث بدأت، واحدة، اثنتان، وبعدها، رسمت القطعة الثالثة التي تتقاطع مع القطعة الأصلية التي رسمتها.

هل تتوقف هنا؟

نعم، تتوقف هنا وتتوقف على تلك. لذا، رسمت واحدةً أخرى هناك مع ثلاثة رؤوس أشكالٍ هندسية، وثلاث حواف ومنطقتين إذ أغلقت منطقة. ومن ثمّ، رسمت قطعةً أخرى حيث رسمت القطعة الأصلية وبعد ذلك، رسمت أخرى تتقاطع مع القطعة المستقيمة الأولى وتمرّ عبرها. إذاً، أصبح لديّ واحد، اثنان، ثلاثة أربعة رؤوس أشكال هندسية، وواحدة، واثنتان، وثلاث، وأربع حواف ومنطقتان.

وهل نجحت العملية بأكملها؟

نعم نجحت.

حسناً. جولي؟

أعتقد أنني اتّبعت الخطوات نفسها، فقد اكتشفت الإمكانات التي توفرها لي هذه القطعة المستقيمة وأعرف أنني في البدء قلت إني أستطيع رسم قطعة مستقيمة واحدة ومن ثمّ قطعة مستقيمة أخرى وحين أقوم بالتعداد يصبح لديّ ثلاث قطع لأنني أملك أربعة رؤوس أشكال هندسية، وحافتين ومنطقة واحدة.

ولكن سرعان ما أدركت أنني لا أستطيع القيام بذلك على أي حال لأنها ليست [غير مسموع]، كأن تسحب قلمك عن الورقة، لذا يجب أن تواصل رسمك، إذاً لا يمكنك القيام بذلك. هذا ما بدا لي هنا أما الباقي فسيكون صحيحاً.

حسناً، والآن اشرحي بدقة ما الذي يُعتبر صحيحاً بالنسبة لك. لأنّ النتيجة لن تفضي إلى ٢، أليس كذلك؟ لمَ لا؟

لأنني لم أواصل الرسم لم أرسم بحركةٍ متواصلة.

نعم، وبعبارةٍ أكثر تقنية، لم يكن الرسم مترابطاً، لم يكن مترابطاً إنما مقسماً. إذاً، أنت تقولين إنك لاحظت أنه ليس مترابطاً وبعد صعوبة التكهن بالنتيجة، لا تدركين ما حصل.

في الواقع، أعطيت مثالاً هنا حيث لا تساوي النتيجة اثنين.

إذاً، ما تقديرك حول ما يُعتبر صحيحاً؟ هل تستطيعين تحديد الأعداد التي تتضمنها معادلة V ناقص E زائد F والتي تساوي اثنين؟

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٢:	**تعداد المزايا**
الموضوع ٧:	**الخروج بتعريف**

هل تستطيع أن تحدد نوع الرسم الذي تتضمنه معادلة v ناقص e زائد f والتي تساوي ٢؟

إذاً، ها هي أبسط طريقةٍ لشرحها، لكل قطعةٍ مستقيمة تتضمن نقطة انطلاق متواصلة أو مترابطة-- أنا أقوم فقط بدعم تصريحي الأول ومتابعة تدوين القواعد بينما نقوم باكتشافها. لذا آمل ألاّ تمانع ذلك. وكأنه لديك رسمٌ متواصل أو رسمٌ--

إذاً رسمك المترابط.

نعم، اعذرني، رسمٌ مترابط، إذاً فإنّ عدد رؤوس الأشكال الهندسية في هذا الرسم ناقص الحواف زائد المناطق سوف يساوي ٢. حسناً، أما السؤال فهو لمَ قد يكون ذلك صحيحاً بشكلٍ عام؟

هذا ما نحاول اكتشافه. في حال كان لديك رسمٌ مترابط، لمَ تُعتبر معادلة رؤوس الأشكال الهندسية ناقص الحواف زائد الأوجه مساويةً لعدد اثنين؟

لأنه كلما-- إذاً، فلنفترض أنه لديك رسمٌ قائم--

حسناً. هل نستطيع القول إنّ النتيجة ستكون صحيحة؟

حسناً، أفترض أنها صحيحة.

حسناً، سنقول إنها صحيحة-- إنّ رؤوس الأشكال الهندسية ناقص الحواف زائد المناطق تساوي ٢.

حسناً.

إذاً، لدينا هذا الرسم حيث تبدو المعادلة صحيحة-- هذا الرسم حيث تبدو المعادلة صحيحة. ويمكنك أيضاً إضافة قطعة مستقيمة أخرى، هذا كل ما يمكنك القيام به. حافة أخرى؟

نعم، يمكنك مواصلة رسمك--

ماذا تعني بذلك؟

إذا كنت ترسم وتوقفت في نقطةٍ معينة، إذا عدت إلى تلك النقطة وواصلت--

حسناً. إذاً يمكنك المواصلة وفيما تواصل ستقوم بإنشاء قطعةٍ مستقيمة جديدة؟

حسناً، حافة أخرى؟

حافة أخرى، آسف.

بإنشائك هذه الحافة، في حال توقفت في نقطةٍ معينة—

إن لم تفعل شيئاً ورسمت قطعةً مستقيمة صغيرة فحسب. وتوقفت-- قبل أن تواصل عملك في أي جزءٍ من الرسم.

حسناً. قبل أن تتفاعل مع الرسم--

نعم

إذاً، لقد أنشأت حافة وأنشأت رأس شكلٍ هندسي في الوقت نفسه.

نعم.

حسناً. ما تأثير ذلك على معادلة v ناقص e زائد f؟

إنها تضيف حافة لأننا قمنا للتوّ برسم حافة. كما أنها تضيف رأس شكلٍ هندسي إذ للانتهاء-- أو لاستكمال حافة، عليك أن ترسم رأس شكلٍ هندسي في النهاية.

حسناً.
إذاً، من خلال إضافة واحدة في الفئتين، لا يهم لأنك تطرح إحداها من الأخرى.
حسناً.
ولا يهم بما أنهما متساويتان.
نعم.
حسناً. وهذا احتمالٌ واحد-- يقتضي رسم حافة لا تتفاعل مع الرسم القائم الحالي. ومن ثمّ، يمكنك أيضاً-- إذاً، لديك رسمٌ قائم-- يمكنك أيضاً ربط نقطتين برؤوس الأشكال الهندسية القائمة؟
نعم.
ممتاز. إذاً، في هذه العملية، يمكنك أيضاً إنشاء حافة جديدة--
نعم.
لربط رأس الشكلين الهندسيين. وهل ستقوم بإنشاء منطقة؟
حسناً.
حسناً. أضفت واحدة إلى فئة الحواف وواحدة أخرى إلى فئة المناطق. بعد ذلك، يتم طرح إحداها وإضافة الأخرى.
نعم.
ومجدداً، يتم إلغاؤهما. هل تفهم ما تقول؟
نعم.
حسناً. إذاً، أخذت رأس شكلين هندسيين قائمين. إذا قمت بربطهما، تحصل على حافة إضافية. وتضيف بعدها منطقة أخرى
حسناً.
ممتاز. ومن ثمّ، تقتضي الإمكانية الثالثة رسم حافةٍ أخرى من رسمك القائم لتترابط أو أنها تتقاطع مع قطعة مستقيمة قائمة؟
حسناً.
حتى الآن، أشجعك على التزام البساطة قدر الإمكان. بمعنى آخر، ما تفعله الآن رائع، وما تفعله جولي وما فعله سكوت في السابق، ما هي الخطوات المتبعة التي يتم من خلالها بناء هذا الرسم المعقد؟
إذاً، أنت تتبع نهجاً معيناً. أنت تقول حسناً، سأرضى بما لديّ وأضيف أمراً ما. وبعدها تتساءل عمّا يمكنك القيام به. قد أعمد إلى إضافتها فتبرز من دون أن تتفاعل. وقد أضيفها بين رأس شكلين هندسيين قائمين، وهلمّ جرّا. أنت تحاول أن توضح أهم الخطوات التي تنقلك من مستوى إلى آخر. لذا أشجعك على تبسيط هذه الخطوات قدر الإمكان.
بمعنى آخر، لا تحاول القيام بأمرين معاً. إنما حاول فعل أمرٍ واحد على حدى. هل تستطيع أن تفكر في-- الموضوع الذي تطرقت إليه للتوّ--
يبدو أكثر تعقيداً بالنسبة لي. صحيح؟ إذا تحدثت عن حافة تتقاطع؟ صحيح؟
نعم.
لمَ يبدو الأمر أكثر تعقيداً بالنسبة لي؟ ماذا يحدث في حال كان لديك قطعةٌ مستقيمة تتقاطع مع قطعة مستقيمة أخرى؟

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٣:	**التقدّم تدريجياً**
الموضوع ١:	**التزام البساطة**

وبالمناسبة-- لذا، سأتحدث بينما يفكرون.

انظر إلى ما يقومون به الآن-- وأنا أشجعهم-- على أن تكون البساطة هدفهم. ما هي أبسط الخطوات المعتمدة لتطوير هذا المركّب؟
وفي بعض الحالات، أي حين ترسم أمراً معيناً، هذا ما يواجهونه.

حين يرسمون ويواجهون أموراً قائمة، ولكن هذا لا يبدو جيداً بالنسبة لي، لأنك حين ترسم هذه الخربشة، تكون قد شملت في رسمك أموراً كثيرة. أنشأ الرسم مناطق جديدة، ورؤوس أشكالٍ هندسية، أنشأ ذلك.

كان الأمر معقداً جداً. لم يكن يسهل العبور من رأس شكلٍ هندسي إلى رأسٍ آخر. وإضافة حافة واحدة أو إضافة رأس شكل هندسي واحد فقط وحافة واحدة. كان الأمر معقداً أكثر بكثير. وما أقصده هو هل تستطيع أخذ هذه-- وهذا ما ترغب في القيام به-- وتقسمها إلى أجزاء مختلفة تُعتبر كل واحدةٍ منها مبسطة؟

فإنّ الحافة e التي ترسمها-- الحافة الجديدة التي ترسمها-- في حال تقاطعت مع قطعة قائمة، تحصل أمورٌ عدة.
نعم، ماذا يحصل؟
من الواضح أنك أنشأت حافة جديدة. لقد أنشأت رؤوس أشكالٍ هندسية جديدة. رأس شكل هندسي.
رأس شكل هندسي.

وقد أنشأت منطقة جديدة. لذا، هذه هي الأمور الثلاثة التي تحصل. وقد حصل أمرٌ آخر أيضاً.

نعم، ولأنك عبرت القطعة وتوقفت عن الرسم، أنشأت رأس شكلٍ هندسي جديد وحافة جديدة. حسناً، هل يمكنك الآن تجزئة هذه الأشياء إلى أقسام بسيطة؟ لا تقم بتجزئتها دفعةً واحدة؟
استمع إلى كل ما تحدث عنه.

حافة جديدة ورأس شكل هندسي آخر كان وسط الحافة. وحافة جديدة لأنك قمت بتقسيمها إلى جزئين. منطقة جديدة-- ثمة الكثير من الأجزاء ومن الأمور التي تحصل دفعةً واحدة. إذاً، كيف يمكنك تجزئتها لكي تصبح مبسطة؟

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٣:	التقدّم تدريجياً
الموضوع ٢:	تحليل سيناريوهات مختلفة

أعني. ماذا يحصل حين يكون لديك قطعة مستقيمة تتقاطع مع قطعة مستقيمة قائمة؟

في الواقع، تنقسم الحافة القائمة إلى اثنتين.

حسناً، إذاً هذا من الأمور التي قد تحصل. وماذا بعدها؟

تحصل على رأس شكلٍ هندسي آخر حين تنقسم إلى اثنتين. كما تحصل على منطقة أخرى لأنك تغلق شيئاً ما. ومن ثمّ، حين تواصل القطعة المستقيمة تلك، يجب أن تنتهي في نقطةٍ ما. عندها، تحصل على رأس شكلٍ هندسي آخر.

حسناً، يحصل الكثير من الأمور هنا. وأنا لا أحب ذلك. لا أريد أن تحصل أمورٌ عدة دفعةً واحدة. لا أريد أن يحصل إلاّ القليل دفعةً واحدة.

إذاً، هل يمكنك القيام بهذه العملية وتجزئتها إلى أقسامٍ عدة؟ كيف ستعمد إلى فعل ذلك؟ وماذا يحصل في حال أضيفت حافةٌ أخرى؟ وماذا تقصد بأنّ حافةً واحدة أُضيفت؟

في حال أنشأت حافةً جديدة، ثمة أمورٌ معينة تؤثر على معادلة v ناقص e تساوي f.

إذاً، تريد إضافة حافة أخرى، هذا هو دافعك؟

حافة إضافية فقط.

عظيم. وماذا يحصل عندما نضيف حافةً أخرى؟

ننشئ رأس شكلٍ هندسي جديداً، لذا يضاف رأسٌ آخر.

في حال؟

ليس بالضرورة.

ليس بالضرورة. حسناً، حسناً ليس بالضرورة.

إذاً، في حال-- في حال لم يتقاطع مع الحافة الأصلية، يضاف رأس شكلٍ هندسي واحد.

صحيح. إذا أضفت حافةً تبدأ في حافةٍ قائمة لتنتقل إلى مكانٍ معين، فأنت تضيف حافةً واحدة ورأس شكلٍ هندسي واحداً.

وهل تغيّر عدد المناطق؟

لا. لا، حسناً. لأنها تبرز. هذه قاعدة واحدة. إذا رسمنا حافةً جديدة تتقاطع، تبقى كل رؤوس الأشكال الهندسية هي نفسها. ولكن يكون لديك منطقتان.

وإذا انتقلت من رأس شكلٍ هندسي قائم إلى رأس شكلٍ هندسي قائم آخر؟

نعم. نعم. يبدو هذا رائعاً.

إذا انتقلت من رأس شكلٍ هندسي قائم إلى رأس شكلٍ هندسي قائم آخر، عندها تعلم ما يحصل. تحصل على منطقة واحدة إضافية، ولكن لا شيء يتغير في رؤوس الأشكال الهندسية. أكثر ما أحبه في هذه العملية هو أنك لا تغير إلاّ القليل.

أنت لا تقول إنك تقوم بهذا أو ذاك. أنت لا تغير الأوجه، والحواف والمناطق. في الواقع، أنت تقوم بأمرين. أنت تغير الأوجه والمناطق في هذه الحالة.

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٣:	التقدّم تدريجياً
الموضوع ٣:	تحليل سيناريوهات مختلفة

أعني. ماذا يحصل حين يكون لديك قطعة مستقيمة تتقاطع مع قطعة مستقيمة قائمة؟

في الواقع، تنقسم الحافة القائمة إلى اثنتين.

حسناً، إذاً هذا من الأمور التي قد تحصل. وماذا بعدها؟

تحصل على رأس شكلٍ هندسي آخر حين تنقسم إلى اثنتين. كما تحصل على منطقة أخرى لأنك تغلق شيئاً ما. ومن ثمّ، حين تواصل القطعة المستقيمة تلك، يجب أن تنتهي في نقطةٍ ما. عندها، تحصل على رأس شكلٍ هندسي آخر.

حسناً، يحصل الكثير من الأمور هنا. وأنا لا أحب ذلك. لا أريد أن تحصل أمورٌ عدة دفعةً واحدة. لا أريد أن يحصل إلاّ القليل دفعةً واحدة.

إذاً، هل يمكنك القيام بهذه العملية وتجزئتها إلى أقسامٍ عدة؟ كيف ستعمد إلى فعل ذلك؟ وماذا يحصل في حال أضيفت حافةٌ أخرى؟ وماذا تقصد بأنّ حافةً واحدة أُضيفت؟

في حال أنشأت حافةً جديدة، ثمة أمورٌ معينة تؤثر على معادلة v ناقص e تساوي f.

إذاً، تريد إضافة حافة أخرى، هذا هو دافعك؟

حافة إضافية فقط.

عظيم. وماذا يحصل عندما نضيف حافةً أخرى؟

ننشئ رأس شكلٍ هندسي جديداً، لذا يضاف رأسٌ آخر.

في حال؟ ليس بالضرورة.

ليس بالضرورة. حسناً، حسناً ليس بالضرورة.

إذاً، في حال-- في حال لم يتقاطع مع الحافة الأصلية، يضاف رأس شكلٍ هندسي واحد.

صحيح. إذا أضفت حافةً تبدأ في حافةٍ قائمة لتنتقل إلى مكانٍ معين، فأنت تضيف حافةً واحدة ورأس شكلٍ هندسي واحداً.

وهل تغيّر عدد المناطق؟

لا. لا، حسناً.

لأنها تبرز. هذه قاعدة واحدة. إذا رسمنا حافةً جديدة تتقاطع، تبقى كل رؤوس الأشكال الهندسية هي نفسها.

ولكن يكون لديك منطقتان.

وإذا انتقلت من رأس شكلٍ هندسي قائم إلى رأس شكلٍ هندسي قائم آخر؟

نعم. نعم. يبدو هذا رائعاً.

إذا انتقلت من رأس شكلٍ هندسي قائم إلى رأس شكلٍ هندسي قائم آخر، عندها تعلم ما يحصل. تحصل على منطقة واحدة إضافية، ولكن لا شيء يتغير في رؤوس الأشكال الهندسية. أكثر ما أحبه في هذه العملية هو أنك لا تغير إلاّ القليل.

أنت لا تقول إنك تقوم بهذا أو ذاك. أنت لا تغير الأوجه، والحواف والمناطق. في الواقع، أنت تقوم بأمرين. أنت تغير الأوجه والمناطق في هذه الحالة.

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٣:	التقدّم تدريجياً
الموضوع ٤:	تحليل قطعةٍ مستقيمةٍ بإسهاب

تحصل على هذين حين ترسم حافةً جديدة، سواء تقاطعت مع الحافة الأصلية أو انتقلت إلى رأس شكلٍ هندسي آخر. يتعين عليك فعل ذلك إذا انتقلت في المجال. والأخرى في حال تقاطعت الحافة مع القطعة المستقيمة الأصلية.

حسناً، هذا ما أقترحه. هل يمكنك أن تبسّط العملية أكثر-- كأن تجزّئها مثلاً إلى أقسامٍ عدة عوضاً عن قسمٍ واحد؟ كيف تجزئها إلى أقسامٍ عدة؟

إذاً كما قلنا، لديك قطعة مستقيمة قائمة. ومن ثمّ تتقاطع، ما يعني أنها تعبر المسار بكامله. ولكن يمكنك تجزئتها حيث تملك تلك القطعة المستقيمة وترسم لاحقاً حافةً أخرى. وحالما تبلغ القطعة المستقيمة تتوقف.

إذاً، يمكنك أن تتخلى عن قلمك. ومن ثمّ، يمكنك العودة إلى تلك النقطة والمواصلة من هناك. ما ينشئ هذا التقاطع بأكمله.

هذا ممتاز. إذاً قمت بتجزئتها إلى قسمين. إذاً، لم تترك مجالاً للضرب والتقاطع.

لا. الضرب والتقاطع فحسب.

والآن، أريدك أن تجزّئها أكثر. ماذا يحصل حين تضرب؟

أنت تنشئ رأس شكلٍ هندسي جديداً. إذاً، قم بتجزئته إلى أقسامٍ عدة.

لقد أنشأت حافة ومن ثمّ رأس شكلٍ هندسي وسط حافةٍ أخرى وهذا ما أرفضه. وبذلك أحدثت تأثيراً وغيرت حافتين مختلفتين. أضفت حافتين في قسمٍ واحد.

إذاً، هل نستطيع البدء بالقطعة المستقيمة القائمة لنضيف عليها وننشئ رأس شكلٍ هندسي.

حسناً، لا تبدأ منها. أين رأس الشكل الهندسي الجديد الذي تحتاج إليه؟

إذاً، نبدأ بالقطعة المستقيمة الأصلية. ومن ثمّ نضيف إليها كأي قطعةٍ مستقيمة أخرى، فتصبح مضاعفة. وبعدها، يمكنك العودة والتقاطع--

إذا كان رأس الشكل الهندسي الواحد، أو الثاني أو الثالث. يمكنك الانتقال من رأس الشكل الهندسي الثالث إلى الثاني. وبذلك، تنشئ حافةً جديدة واحدة ومنطقة واحدة فقط.

ومن رأس الشكل الهندسي الثاني، يمكنك المواصلة وإنشاء رأس الشكل الهندسي الرابع؟ حسناً ما رأيك؟

لا أعتقد أنّ ذلك أسهل. لا أعتقد أنه-- لا أعتقد ذلك. ولا يتّضح أنه بوسعك القيام بذلك. إذ عليك التفكير مسبقاً.

حين ترسم، في حال كنت ترسم، وجب عليك أن تكون قد بسّطت رسمك الآخر. عليك أن تعرف إن كان يجب أن تقوم بحلقة تكرار أو أن تتوقف.

تماماً، نعم، نعم، نعم. إذاً، لا يبدو ذلك مناسباً جداً. إذاً، ماذا ستفعل؟

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٣:	**التقدّم تدريجياً**
الموضوع ٥:	**ما هي أبسط الخطوات؟**

بات اعتماد البساطة أمراً غاية في التعقيد، وهذا أمرٌ غريب. وهو لتحدٍ مذهلٍ أن نتمكن من إنجاز أمرٍ ما. قد يبدو وكأنني أقوم بأمرٍ واحد، ولكن في الواقع أنا أقوم بأمورٍ عدة في الوقت نفسه وإذا ركّزت على عملية تحديد الخطوات البسيطة التي يشتمل عليها أمرٌ ما.

غالباً ما أفكر في الرياضة عندما يخطر في بالي التناظر المرتبط بالتفكير. على سبيل المثال، إذا كنت تمارس لعبة كرة المضرب، حين تفكر في تصويب الكرة، في الواقع، تحدث أمورٌ كثيرة. فما يحدث هو أنك تنظر في مكانٍ معين، وتستعد، فيما تحرك قدميك بحيث تتفاعل مع المكان الذي تستقر فيه الكرة فتستدير باتجاهها. تحصل هذه الأمور كلها. وفي حال أردت أن تتفوق في هذا النوع من المهارات وفي هذا النوع بالتحديد، من المهم جداً أن تفكر في تحديد هذه الخطوات البسيطة ذات الصلة. فعندها، تكون في موقف المتحكم بها. ويمكنك أن تقوم بأمرٍ ما حيالها. ففي حال كنت تمارس لعبة كرة المضرب مثلاً، لعلّك لا تركز تماماً على الكرة. لعلّها مشكلتك الفعلية. وفي هذه الحالة، تحدد ما هي الخطوات الإضافية.

حين ترسم هذا الخط الذي يبدأ هنا ويتقاطع وتقول هل هذا أمرٌ واحد؟

وفي الواقع، قد تكون تلك طريقةً لتسأل نفسك كيف يتم اكتشاف ذلك. كم من الأمور تغير عندما تقوم بذلك؟ مفهوم؟

حين تضيف حافة تبرز إلى العلن ولا تصطدم بأي شيءٍ آخر، فأنت فعلاً تُحدث تغييرات لأمرين فحسب. أنت تضيف حافةً واحدة ورأس شكلٍ هندسي واحد. هذا كل ما في الأمر. صحيح؟

حين تضيف حافةً تبدأ من رأس شكلٍ هندسي قائم وتنتقل إلى رأس شكلٍ هندسي آخر، فأنت تغير أمرين تماماً، تغير الحافة وعدد المناطق.

حسناً. والآن، ماذا عن التحليل؟ أي ماذا تُغيِّر حين تعتمد التقاطع؟

يبدو الأمر سهلاً بالنسبة إليك. ولكنني أقول إنه أمرٌ أكثر تعقيداً. وقد قلت ذلك سابقاً، كل هذه التغييرات. أما السؤال فهو، هل يمكنك تجزئته إلى خطواتٍ عدة، لتغير كل خطوةٍ منها أموراً أقل.

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٣:	**التقدّم تدريجياً**
الموضوع ٦:	**توضيح واقع الحالة**

حسناً، ما كان لديّ سابقاً يغير أمرين في كل مرة. ولكن لا أعلم كيف ستستمر في تجزئة ذلك. والآن، ماذا تقصد بـ "ولكن"، فما كنت تملك في السابق لم يكن عامًّا. لأنك قلت سوف أوسّع حافة. ولكن حسناً، لعلّك لا تملك حافة بارزة فحسب تبدأ منها. صحيح؟

ولهذا السبب لم أحبّذ ذلك. لأنك كنت تضيف أمراً قد لا يكون ممكناً. إذاً، هل يمكننا-- هل يمكننا تجزئة حلقة التكرار هذه إلى قسمين؟
حسناً. نعم.

أجل. فليكن الهدف واضحاً بالنسبة لنا. ما هو السؤال الذي تعالجه؟ وكالعادة، هذه إحدى النقاط الفعلية. على أي حال، لا أعلم إن كان هذا المساق الهائل عبر الإنترنت سيعمل.

لا أعلم إن كان سيعمل. ولكن ما يهمني فعلاً في هذه المسألة أنها توضح واقع المشاكل التي قد تنشأ. وإذا كنت ألقي محاضرة تتطرق إلى هذا الموضوع، قد أتفوّه بأمورٍ صحيحة.

قد يومئ الجميع برؤوسهم ويعتقدون أن لا طريقة بديلة للتفكير في الموضوع. إنّ فكرة أنك تعاني عند البتّ في هذه الفكرة هو واقعٌ بحدّ ذاته. بهذه الطريقة يتمكن الشخص فعلاً من إدراك الأفكار الجديدة، ومن تطويرها وابتكارها. فالأفكار لا تكون واضحة وضوح الشمس. لهذا السبب أحبّ هذه المسألة. وأعتقد أنها ممتازة لأنها توضح الواقع. ولكن من جهةٍ أخرى، أعتقد أنك حين تدركها، سوف تقول، حسناً نعم.

كان عليّ اكتشافها على الفور أو كان عليّ أن أقولها لك فوراً أو أي شيءٍ من هذا القبيل. ولكن ثمة سؤالٌ يقف في مواجهة الواقع ألا وهو، هل نوضح السؤال الذي تفكر فيه؟ ما هي الحالة التي تتعامل معها؟ هل تحدثنا للتوّ عن قطعة مستقيمة واحدة مع تقاطع؟

أو ربما نتحدث عن صورة قائمة أو متشابكة تشمل V ناقص C زائد F يساوي ٢، ونقوم الآن بإضافة قطعة مستقيمة أخرى إليها؟ أيّ منهما سنطبّق؟

وربما يُحدث هذا الأمر فارقاً في كيفية تحليلك للموضوع. إذاً، بمَ تفكر؟

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٤:	**الإجراءات الإضافية تؤدي إلى استنتاجات ثابتة**
الموضوع ١:	**تجزئة الإجراءات**

فكرتي هي، لديك قطعة مستقيمة قائمة. قطعة مستقيمة قائمة أو صورة قائمة كاملة ومتشابكة. القطعة المستقيمة فقط. حسناً.

أجل. قطعة مستقيمة فقط. نريد إنشاء قطعةٍ مستقيمة أخرى ولكن من رأس شكلٍ هندسي قائم يتقاطع مع حافة قائمة ويعبر منها.

حسناً. ويعبر منها. وأنت تريد تجزئة الإجراءات. نعم.
حسناً. إذاً هيّا. إذاً، كيف ستعمد إلى إجراءاتٍ عدة؟

في الأساس، فكرت في القطعة المستقيمة فحسب، حيث لديك القطعة المستقيمة القائمة الخاصة بك، مع حافة واحدة ورأس شكلين هندسيين. تبدأ في رأس شكلٍ هندسي واحد، فترسم حافة وتعود إلى نقطة البداية إلى أن تصطدم بالقطعة المستقيمة القائمة. ولكن قلنا، يمكنك التوقف هناك والاستمرار من جديد. ولكن، حين تتوقف هناك، تقوم بثلاثة أمور. تنشئ حافة.

إذاً، تنشئ حافة مع حلقة التكرار الخاصة بك. حين تتوقف، تنشئ رأس شكلٍ هندسي. ومن خلال إنشاء رأس الشكل الهندسي هذا، تنقسم الحافة القائمة إلى جزئين.

صحيح. ممتاز. إذاً، فكّر في كل الأمور التي قمت بها. ويمكنك تقسيمها كي لا تقوم بها دفعةً واحدة. بمعنى آخر، لقد قمت بإنشاء حافتين، حافة حلقة التكرار وقسمت الحافة المنفردة إلى اثنتين كما قمت بإنشاء رأس شكلٍ هندسي آخر ووجه آخر. هل تستطيع تجزئة هذه الإجراءات إلى إجراءات أخرى؟ إذاً، ما الذي يشكل منطقة؟

إذا نظرنا إلى عناصره، لدينا حواف، ولدينا رؤوس أشكال هندسية كما لدينا مناطق. إذاً، يتم تحديد الحافة، لديك حافة واحدة ورأسا شكلين هندسيين. إلاّ أننا لم نحدد بالفعل ما هي المنطقة.
حسناً. هذه نقطة جيدة.

نعم. بالتالي، ما هي أبسط منطقة خطرت ببالنا؟
إذاً، إنها تُعتبر كأي شيءٍ مرفق. نعم.

نعم. أعني قد تشمل رأس شكلٍ هندسي واحد، ورأسين و٥ ملايين رأس شكل هندسي. كما قد تشمل حافةً واحدة فقط، أو اثنتين، أو-- أي أنّ المنطقة هي-- أعني، يمكننا بكل بساطة رسم دائرة.

هذا صحيح. لديك رأس شكل هندسي واحد. لديك حافة واحدة تلمسه وتعود-- إلى رأس الشكل الهندسي نفسه. --إلى رأس الشكل الهندسي الأصلي. إذاً، تُعتبر تلك نقطة انطلاق مهمة لتحديد المنطقة. يجب أن يكون هنالك دائماً رأس شكل هندسي واحد. تتضمن المنطقة دائماً حافة واحدة. أو على الأقل—

تقصد حلقة تكرار. إذا كنا نعتمد حلقة تكرار، فهي على الأقل تتضمن حافةً واحدة، ومن ثمّ، تعود في دائرة إلى رأس الشكل الهندسي الأصلي.

أو ما هي الطريقة المثلى لتحديد ذلك؟

لدينا واحدة-- وهل تقوم بتحديد منطقة عامة؟ هل هذا ما تصبو إليه أو هل هي مجرّد حلقة تكرار؟

مجرّد حلقة تكرار. نعم. حسناً. إذاً، بمعنى آخر، تبدأ برأس شكلٍ هندسي واحد، وترسم حافة تعود إلى نفسها في النهاية. تعود إلى-- نعم.

نعم. وبالمناسبة، تُسمى تلك خط منحنى مغلق بسيط. إنها عبارة عن حلقة تكرار تعود في النهاية إلى نقطة انطلاقها. ومن ثمّ، تقسم المستوي إلى منطقتين، داخل المستوي وخارجه.

حسناً. إذاً، إنها إحدى أفكارنا الرئيسية. حين تقوم بإنشاء خط منحنى مغلق مثل هذا، يقسم المستوي إلى منطقتين، من الداخل والخارج.

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٤:	**الإجراءات الإضافية تؤدي إلى استنتاجات ثابتة**
الموضوع ٢:	**إنشاء منطقة**

بالمناسبة، يبدو أنني أوقفت شيئاً ما هنا. لقد أخفيتها عنك، وهي في الواقع النظرية التي تقول إنك إذا رسمت خط منحنى يعود إلى نفسه ويتوقف، فهو في الواقع يقسم دائماً المستوي إلى منطقتين، من الداخل والخارج. ويبدو أنّ إثبات هذه المسألة أمرٌ معقد. يبدو ذلك واضحاً أليس كذلك؟

وهو صحيح أيضاً.

ولكن، في حال حاولت تحديدها-- إذ ثمة حلقات تكرار تتضمن عدداً لامتناهياً من الحركات ما يسبب تعقيدات لن تتخيلها أبداً. فيتعين عليك أن تقول، هذا صحيح حتى ولو مع أكثرها تعقيداً. أنها ستقوم بتجزئتها إلى منطقتين تماماً عوضاً عن التعقيد الناشئ من المناطق المختلفة. ولكن لن يكون علينا الانتقال إلى هناك. لن نفعل ذلك رغم أنّ الأمر ممتع.

أنا ممتنّ لك.

لا شكر على واجب. لا شكر على واجب. لن ننتقل إلى هناك لأننا سنفترض أنّ الأمر صحيح وهو صحيح فعلاً. حين تغلق خط منحنى مغلق، تقوم بإنشاء منطقة أخرى. إذاً، هل تعتقد أنه تعريفٌ جيد للمنطقة؟

حسناً، إنه مرفق-- إنه مرفق وهو يتضمن على الأقل حافةً واحدة ورأس شكلٍ هندسي واحد.
نعم، وقد يحتوي على رؤوسٍ عدة.

إذا تقاطعت مع منطقتك هنا، عندها قد يكون لديك منطقة تشمل رأس شكلٍ هندسي واحد، أو اثنين، أو ثلاثة أو أربعة، أو سبعة أو ١٥٠ أو مهما كان. صحيح؟

أي أنّ أي شيءٍ ينغلق على نفسه، يكون لديه حدود بالفعل كما ترى وهي تتمثل في خط منحنى مغلق بسيط. أي أنك تبدأ في مكانٍ ما، يمكنك عبور هذه الحدود والعودة من حيث بدأت. وهذا ما يقسم المستوي إلى منطقة أخرى.

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٤:	الإجراءات الإضافية تؤدي إلى استنتاجات ثابتة
الموضوع ٣:	إجراءات أبسط

فلنعد إلى البداية ولنكن واضحين حول الحالة الأساسية التي تحاول معالجتها.

بدأت برسم قطعةٍ مستقيمة واحدة. كما فهمت، تتضمن القطعة المستقيمة الواحدة رأس شكلين هندسيين وحافة واحدة. أما ما أردت القيام به فهو رسم حافة يتقاطعها رأس الشكلين الهندسيين.

نعم.

وقلت آنذاك إنك تقوم بأمورٍ عدة دفعةً واحدة. هل يمكنك تجزئتها؟ أي أطلب منك أن تجزئها إلى إجراءاتٍ بسيطة وأن تقوم بأمورٍ ضئيلة قدر استطاعتك في كل إجراء. مفهوم؟

بالتالي، هيّا قل لي كيف تنوي تجزئتها-- تبدو عمليةً بسيطة جداً. تعمد إلى التقاطع فقط. ولكني أريد أن تجزئها إلى إجراءاتٍ أبسط. وبشكلٍ خاص، سأكون دقيقاً جداً. حين تحاول التفكير ببساطة، فأنت تريد أن تقول عدد الأمور الضئيل الذي يمكنك التأثير عليه. مفهوم؟ حين توقفت، كم من الأشكال ساهمت في تغييرها؟

الثلاثة معاً.

نعم.

لقد غيرت الثلاثة.

ولكن أشر بشكلٍ خاص إلى الأشكال الجديدة.

إذاً، حين توقفت، كانت لديك حافة واحدة لأنك رسمت واحدة.

صحيح.

وحين توقفت، قمت بإنشاء رأس شكلٍ هندسي جديد.

نعم.

ونظراً إلى إنشاء رأس الشكل الهندسي الجديد هذا، عمدت إلى فصل القطعة المستقيمة القائمة إلى قسمين.

حسناً.

بالتالي، أنشأت-- أضفت حافة جديدة إلى إجمالي الحواف.

صحيح. كما أنك أنشأت وجهاً جديداً بعد أن لجأت إلى التقاطع والتوقف.

نعم. الآن، أريدك أن تقوم بذلك، كل خطوةٍ على حدة عوضاً عن القيام بها كلها دفعةً واحدة. كيف يمكنك أن تجعلها عملية ذات إجراءات متعددة لإنجاز هذا الرسم؟

حسناً، إنها الطريقة الوحيدة لإنشاء وجهٍ جديد--

نعم. وما هي الأشكال التي أضفتها؟

وجه جديد.

حسناً. وجه جديد.

حافتان. صحيح.

أجل. ومن ثمّ رأس شكل هندسي جديد.

حسناً. والآن، أطلب منك أن تقوم بهذه الإجراءات أولاً. فلنقم بإنشاء رأس شكلٍ هندسي واحد. ماذا يحصل عندما تنشئ رأس شكلٍ هندسي واحد.

ممتاز. ماذا يحصل عندما تنشئ رأس شكلٍ هندسي جديد؟

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٤:	**الإجراءات الإضافية تؤدي إلى استنتاجات ثابتة**
الموضوع ٤:	**فكرة ممتازة؟ (احتمال الإزالة)**

تقوم بإنشاء حافة جديدة.

صحيح. أليس كذلك؟ وهذا إجراءٌ ممتاز؟

تستطيع--

حاول ألاّ تتوقف الآن. لا تتسرّع.

أنا آسف.

لم تكن تضحك. يبدو أنها كانت فكرةً سيئة. يبدو أنها كانت فكرةً سيئة جداً.

اعتقدت أنها فكرةٌ ممتازة. ولكن، لا، كانت تنظر إلى هذه الفكرة من منظورٍ مختلف.

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٤:	**الإجراءات الإضافية تؤدي إلى استنتاجات ثابتة**
الموضوع ٥:	**إنشاء رأس شكل هندسي**

حسناً، نعلم أننا كلّما أنشأنا رأس شكلٍ هندسي جديد ننشئ حافة جديدة. ماذا ستفعل بالتحديد حيال هذا الأمر؟ أعني، حين قلت إنك ستنشئ رأس شكلٍ هندسي جديد، أين ستضعه تحديداً؟

حسناً، هنا سيكون على القطعة المستقيمة القائمة.

أجل. إذاً، على حافة قائمة. وماذا يحصل إذا وضعت رأس شكلٍ هندسي آخر وسط حافةٍ قائمة؟

تنقسم الحافة القائمة إلى اثنتين.

صحيح. وهل تبقى المعادلة V ناقص E زائد F يساوي ٢ هي نفسها؟

تحصل على حافتين، لذا تكون المعادلة ٣ ناقص ٢ زائد ١. وبالتالي، ما الذي غيرته في التعداد في حال أضفت رأس شكلٍ هندسي وسط الحافة. لقد أضفت رأس شكلٍ هندسي واحد وحافة واحدة.

نعم.

نعم، إذاً هذا جيد.

صحيح؟

أي، بمعنى آخر، انظر، نحن نبحث عن الإجراءات، ويسهل تحليل كلٍّ من هذه الإجراءات، كما أنّ كل إجراء يحافظ على معادلة V ناقص E زائد F يساوي ٢. صحيح؟ هل يحصل ذلك عندما تتم إضافة رأس شكل هندسي وسط الحافة؟

إذاً، حتى لو لم يكن ثمة ترتيبٌ معين--

صحيح.

ليس من الضروري أن يكون هنالك ترتيب معين.

صحيح، صحيح.

جيّد، يمكنك إضافته فحسب.

هكذا. ها قد حصلت عليه. نعم.

حسناً. ومن هذه النقطة بالتحديد، إذاً، أصبح لدينا الآن حافتان متصلتان بروؤس أشكالٍ هندسية ثلاثة. صحيح؟

رأس شكل هندسي، حافة، رأس شكل هندسي، حافة، رأس شكل هندسي. إذاً، يمكننا ربط أي رأسين من رؤوس الأشكال الهندسية بالحافة الجديدة. وهكذا ترى الآن أنك إذا أضفت رأس شكلٍ هندسي وسط الحافة، تبقى معادلة V ناقص E زائد F هي نفسها.

إنه الأمر نفسه لأنك أضفت رأس شكلٍ هندسي واحد وحافةً إضافية أخرى. إذاً، هذا إجراء يمكنك دائماً اعتماده.

نعم.

حسناً. وبالتالي، من هذا الرسم الجديد مع رؤوس الأشكال الهندسية الثلاثة والحافتين يمكننا ربط رأس الشكل الهندسي أو أيٍّ من رؤوس الأشكال الهندسية بحافةٍ واحدة. ما يؤدي إلى إنشاء وجهٍ جديد.

ونحن سنغير عدد الأوجه فقط، وهو-- مرةً أخرى، وعدد الحواف مرةً أخرى. وبما أنه سيتم طرحهما مجدداً.

حسناً.

والآن، سأطرح عليك هذا السؤال. فلنبدأ من الصفر. ما الذي تريد إظهاره؟ ما هو هدفك الآن؟

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٤:	الإجراءات الإضافية تؤدي إلى استنتاجات ثابتة
الموضوع ٦:	إنشاء تعريف

هدف الصورة الكبيرة.

هدف الصورة الكبيرة؟

كنت قد تناسيت هذا الأمر. لقد قُطع حبل أفكاري. لكل الأشكال-- كل الأشكال المرسومة باستمرار-- مع الحواف ورؤوس الأشكال الهندسية والمناطق، حين تأخذ عدد رؤوس الأشكال الهندسية، وتطرح عدد الحواف وتضيف عدد المناطق، سوف تحصل دائماً على الرقم ٢ كنتيجة.

حسناً.

والآن، كنت مرتبكاً بشأن تصريحك حول الاستمرار برسم الأشكال.

ماذا يعني هذا الأمر بالتحديد؟

حسناً.

إذاً تبدأ، تضع قلمك على الورقة وترسم مهما كان وحالما ترفعه، ينتهي الأمر. تنتهي الصورة.

حسناً.

ولكن، يمكنك أيضاً، إذا أردت المتابعة، يمكنك المتابعة من نقطة البداية أو نقطة النهاية من هاتين النقطتين فقط. لمَ لا؟ لماذا لم تبدأ من رأس شكلٍ هندسي آخر؟

إذ لو رسمت أي شيء تريده وانتهيت لا يمكن لصورتك -- في حال انتقلت إلى رأس شكلٍ هندسي آخر الآن بدأت أشكّ في نفسي.

مايك، إذاً أنت في مسارٍ معين، تأخذ هذا المسار—لنقل أنت في-- تتبع هذا المسار وتنتهي. الطريقة الوحيدة-- لا يمكنك بسحر ساحر بلوغ وسط المسار. عليك أن تأخذ--

لا، يمكنك القيام بذلك. تنتقل إلى هناك فقط.

أعني، إذا كنت تحاول رسم صورةٍ ما، يمكنك في البدء رسم منحنى ويمكنك بالتالي التقاط قلمك ووضعه في رأس شكلٍ هندسي قائم.

أعني، يمكنك جسدياً القيام بذلك ويمكنك عندها رسم صورةٍ ما. وأنا أقول، هل ستبقى المعادلة v ناقص e زائد f تساوي ٢ أو لا؟

حسناً، إذاً-- لا أعرف بعد.

نعم، إذاً لدينا هذا الرسم وهو يلائم معادلة V ناقص E زائد F تساوي ٢.

إذاً، في حال انتقلنا من رأس شكلٍ هندسي قائم، وقمنا مجدداً برسم حافة أخرى، كمواصلة صورتك، إذا رسمت حافةً أخرى، عندها، أنت تنشئ تلقائياً-- وأين نهاية هذه الحافة؟

أو أنه رأس شكلٍ هندسي تقوم بإنشائه—

وانتظر.

أنت لا تريد أن -- تتذكر-- نحن لا نسمح لك بمواصلة العمل وإنشاء-- يمكنك إنشاء-- أرى ذلك.

أنت تعني في حال انتقل إلى وسط منطقة وتوقف.

أنا آسف، هذا صحيح.

لا بأس بذلك.

إذا برزت هذه الحافة من منطقة وتوقفت. تنتهي في رأس شكلٍ هندسي جديد. رأس شكل هندسي جديد. إذاً، في هذه الحالة، سوف تحصل على حافة إضافية ورأس شكل هندسي إضافي أما التوازن فيبقى هو نفسه.

حسناً.

أو إذا رسمت رأس شكلٍ هندسي آخر، قد ينتهي في نقطة النهاية نفسها حيث ستحصل على حافةٍ جديدة إضافةً إلى رأس شكلٍ هندسي جديد. وستحافظ تلك أيضاً على توازنها.

وماذا عن البدء من رأس شكلٍ هندسي واحد باتجاه رأس شكلٍ هندسي آخر قائم؟

يكون الأمر نفسه. ترسم حافةً جديدة وتحصل على وجهٍ جديد في الأعلى ويبقى التوازن هو نفسه.

صحيح. إذاً، ماذا تستنتج؟

حسناً، مهما فعلت، في حال حافظت صورتك الأصلية على هذا التوازن، عندها، مهما رسمت من رأس الشكل الهندسي، سوف يكون التوازن هو نفسه. ما رأيك؟

بالمناسبة، دعني أقل ما فعلت لتوّك. ما كنت تحلل أساساً، والصور التي تمكنت من رسمها، المكان الذي بدأت منه وقمت بحلقة تكرار ولم ترفع قلمك عن الورقة وتوقفت. والآن، وقد طرحت عليك السؤال، حسناً، انتظر لحظة.

لنفترض أنك رفعت القلم ولكنك بدأت الرسم في مكانٍ ما، من رأس شكلٍ هندسي، كنت قد أنشأته في السابق ورسمت حافةً جديدة، أكانت تتصل برؤوس أشكالٍ هندسية قائمة أو تبرز من المنطقة فحسب. وقمت بتحليل ذلك واكتشفت أنّ العملية تفلح. إنها الطريقة التي تحسّن فيها معرفتك وتوسّع آفاقك.

كانت لديك فكرة حول مجموعة من الأشكال التي حلّلتها وأدركت أنّ معادلة V ناقص E زائد F تساوي دائماً ٢. ومن ثمّ، قلت، انتظر لحظة، يُحتمل أن أوسّعها لمواصلة رسم شكلٍ مختلف ربما لم أتمكن من رسمه من دون رفع القلم، إذ كان عليّ أن ألتقطه مجدداً وأن أبدأ من النقطة نفسها، وتحديداً من رأس شكلٍ هندسي قائم.

والآن، أنت تقول إنّ هذا الأمر يفلح أيضاً.

كما ترى.

إذاً، لقد قمت بتوسيع نطاق فئة الأشكال التي تمتاز بهذه الخاصية. وهذه إحدى الطرق التي تم من خلالها ابتكار المعرفة. ثمة بعض الأمور الصحيحة في مكانٍ ما. وبالتالي تقول، لا بأس إن غيرت بعض الأمور. الآن، وبما أنك قلت ذلك، قمت برسم شكلٍ في وقتٍ سابق ولم تفلح. ما كان ذلك الشكل؟

قطعتان مستقيمتان منفصلتان.

قطعتان مستقيمتان منفصلتان. لم تبدآ من النقطة التي بدأت بها سابقاً.

صحيح.

نعم، لم تبدأ من النقطة التي بدأت بها سابقاً. بالتالي، حصلت على إجابة مختلفة.

حسناً.

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٥:	**ردود فعل الطلاب**
الموضوع ١:	**توسيع نطاق معرفتك من خلال الأسئلة**

وبالمناسبة، ما السؤال الذي تطرحه الآن على نفسك بغية توسيع نطاق معرفتك الحالي ليلائم حالاتٍ مختلفة؟
حسناً، عوضاً عن البدء من رأس شكلٍ هندسي قائم، يمكنك أن تسأل إن كان بإمكانك البدء من أي مكان، مثلاً-- مثلاً من وسط حافة.
حسناً.
ولكن إن بدأت من وسط حافة، ما الإجراء الأول الذي تتبعه؟
حسناً، تضع نقطة فحسب.
صحيح.
إذاً، لديك رأس شكلٍ هندسي إضافي ومن ثمّ تقوم بتجزئة الحافة القائمة إلى قسمين.
صحيح.
بالتالي، ما زال التوازن قائماً. التوازن هو نفسه.
صحيح.
صحيح. إذاً، ستكون عملية ذات إجراءين. لن تعمد إلى الرسم إلاّ من رأس شكلٍ هندسي. فأنت تجعله رأس شكلٍ هندسي من خلال وضعه هناك.
حسناً.
وعندها، سوف تفلح العملية. أليس كذلك؟
تسير العملية على ما يرام. ولكن ما إن أصبح لديك خطّان متوازيان، لم تفلح العملية.
إذاً، في حال قمت بربطهما لاحقاً، هل يفلح الأمر؟
نعم.
إذاً سؤالي هو، ما نوع الأسئلة التي قد تطرحها حول الأشكال غير المتصلة؟ ما الذي لن يفلح؟
إن كانت بحوزتنا كل الأشكال التي واصلنا رسمها-- ربط--نعم. الأشكال التي استمرّ رسمها. الشكل المرسوم.
صحيح.
إذاً، ما هي الأشكال التي لا تلائم هذا المعيار؟
حسناً.
كيف تصف الأشكال غير المرتبطة؟
لعلّه ليس سؤالاً مناسباً.
ولكن أعني، كيف تصنّف شكلاً غير مرتبط؟

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٥:	**ردود فعل الطلاب**
الموضوع ٢:	**ما الأسئلة الأخرى التي يمكنك طرحها؟**

ما الذي قد تبحث عنه؟ هذا ليس شكلاً بالفعل، أليس كذلك؟

الخطان المتوازيان—سأستخدمهما كنموذج فحسب-- فهذا ليس شكلاً بالفعل. هذان أمران مختلفان. أمران مختلفان. رسومات. قطعتان مستقيمتان مختلفتان.

إذاً، سأطرح عليك الآن هذا السؤال. فلنفترض أنك تملك شكلاً مقسماً إلى قسمين. لم يكونان مرتبطين؟

كان كل واحد منهما مرتبطاً إلاّ أنّ أحدهما ما كان يلامس الآخر. كانا منفصلين. إذاً، ما السؤال الذي قد تطرحه؟ ليس وكأنّ الإجابة.

أنا أقول فقط، ما السؤال الذي قد تطرحه بشأن ذلك؟ هل يعدل كل شكلٍ فردي التوازن؟

نعم، قد يقوم كل شكلٍ بذلك.

نعم.

نعم. إذاً، ما السؤال الذي قد تطرحه بشأن الشكل ذي القسمين؟

لعلّه ارتباطه بشكلٍ ذي قسمٍ واحد.

لدينا معادلة القسم الواحد. إنها معادلة v ناقص e زائد f التي تساوي ٢. إذاً، حين يكون لديك شكلان، ثمة معادلة متناظرة تشير إلى أنّ v ناقص e زائد f ستساوي نتيجةً معينة. حسناً؟

ربما ٣.

نعم، ربما ٣.

نعم، بالضبط. وهذا هو السؤال الذي قد تطرحه على نفسك. لمَ لا تطرح على نفسك هذا السؤال، حسناً، v ناقص e زائد f تساوي ٢. وإن لم تكن مرتبطة، لن تكون نتيجة المعادلة ٢.

أتساءل ما إذا-- هل سأحصل دائماً على ٣ إذا كان هنالك قسمان؟ أو ماذا عن هذه الأقسام الثلاثة؟ ماذا عن أربعة أقسام؟ رأيت؟

إذاً، لديك مجموعةٌ كاملة من الأسئلة. يُعتبر طرح الأسئلة أحد الفرص المهمة في الحياة.

طرح الأسئلة.

ما الذي يمكن تأجيله؟

فلنفترض أنّ هنالك تفاوتاً.

لا، لن يفلح الأمر بالطريقة نفسها. ما يتيح لك طرح سؤالٍ مختلف.

هل يمكنك توسيع نطاق معرفتك وفهمك للتعامل مع الحالات التي تختلف عن الحالة التي بدأت فيها؟ وهذه إحدى الفرص المذهلة للتفكير الإبداعي. أنك ترى الحالة وبعد فهمك لها، لن تتوقف.

أنت تقول إنني في حال غيرتها بطريقةٍ ما، هل يمكنني إدراكها هل يمكنك التفكير في حالات أكثر شموليةً؟ حالاتٍ تجمع أخرى أكثر تعقيداً؟

وبالتالي، من خلال التنمية الإضافية، تستطيع فهم التعقيد أكثر من أي وقتٍ مضى. لذا، أقول إنّ إحدى الدروس التثقيفية لهذا الاختبار هنا كان اعتماد البساطة منذ البداية ومشاهدة كيفية تراكم التعقيد تدريجياً. وبالتالي، في كل إجراءٍ بسيط-- في البدء، عملنا جاهدين للحرص على أن يحافظ كل إجراء على ضآلته وبساطته قدر الإمكان. ومن ثمّ، استطعنا تحليله لأنه كان غاية في البساطة.

وبعد أن قمنا بتحليله، قلنا، ما الصحيح بعد؟ ما الصحيح بعد؟

ما الصحيح بعد؟

وبالتالي، من خلال فهم الإثبات، ليس البيان فقط إنما الإثبات أيضاً، لاحظنا، نعم، أنه حتى ولو كانت لديك صورة متصلة لم تتمكن من رسمها مع منحنى ولكن كان عليك رفع قلمك ورسم حافة أخرى، إلاّ أنّ العملية سارت على ما يرام.

لأنك أدركت الإثبات، أرأيت؟

وبالتالي، عندما تدرك السبب في صحّة أمرٍ ما، يمكنك استغلال معرفة العالم بأسره وتوسيع نطاقه. ومن ثمّ، تدرك أيًّا من الاختلافات ستستمر. عندها، تنطلق في رحلةٍ مذهلة من الاستكشافات. وبالمناسبة، هذه الفكرة الخاصة يُطلق عليها اسم ميزة أويلر.

إنّ معادلة v ناقص e زائد f تساوي ٢ هي بحدّ ذاتها ميزة أويلر. يبدو أنّ هنالك الكثير من الأمور التي يمكن استكشافها حول ميزة أويلر في مواضع مختلفة.

على طارة مثلاً.

إنّ الطارة، التي تُعتبر حدود أنبوبٍ حلقيّ! يمكنك البدء برسم هذه الأشكال هنا ومشاهدة إن كان هنالك معادلة v ناقص e زائد f؟ وماذا يحصل؟ أو طارة مزدوجة؟ أو طارة ثلاثية؟

وأنا أدعوك إلى استكشاف هذه الفرص المشوقة. وثمة المزيد بعد. وسيبقى هنالك المزيد. وهذه إحدى ميزات التفكير، أنك يمكنك دائماً العثور على فرصٍ جديدة لاستكشاف الأفكار. إذاً، نراك في المرة القادمة.

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٦:	**مسار مُلغَز**
الموضوع ١:	**رسالة من د. ستاربيرد**

يكمن الهدف من هذا المساق في تعلم كيفية تطوير الأفكار كيف تبتدع الأفكار؟ من أين تأتي؟
ينطوي أحد أهمّ مصادر الأفكار على دراسة ألغاز محددة أو تحديات محددة ومن ثم استكشاف ما هي عليه بالفعل. أي عزل المسائل الأساسية ومن ثم اكتشاف إمكانية تطوير المسائل الفردية للحصول على نظرية مكتملة.
وقد طُرحت مسألةٌ من هذا النوع في ثلاثينيات القرن الثامن عشر وهي كان الأكثر شهرةً وإنتاجيةً وقد أُطلق عليها اسم مسألة جسور كونيغسبرغ وكان ليونارد يولر الذي اشتهر بحل هذه المسألة، عالمَ رياضيات في القرن الثامن عشر وكان عالماً شهيراً جداً ومنتجاً وقد بعث برسالةً إلى جيوفاني مارينوني وهذا نص الرسالة التي كتبها عن مسألة جسور كونيغسبرغ قال: "طُرحت عليّ مسألة عن جزيرة واقعة في مدينة كونيغسبرغ يحيط بها نهر تمتد فوقه سبعة جسور وسُئلت عما إذا كان يستطيع أحدهم عبور الجسور المنفصلة عن بعضها البعض من خلال مسار متصل شرط عدم اجتياز كل جسر إلا مرة واحدة وعلمت أنّ حتى ذلك الحين لم يكن أي شخص قد برهن بعد إمكانية القيام بذلك أو استحالته وبالتالي هذا هو التحدي الذي طُلب من ليونارد يولر مواجهته وهذا هو التحدي الذي سنعمل عليه اليوم أما السبب في أهمية هذه المسألة فيعود إلى أنّها أدت إلى تطورات غنية جداً في علم الرياضيات
في الواقع ظهرت فروع قائمة بذاتها في علم الرياضيات من الاستكشاف الذي تم التوصل إليه من خلال هذه المسألة والمسائل ذات الصلة. وبالتالي سنحاول اليوم حل هذه المسألة من خلال طالبتنا الرائعة جولي
جولي، هل ترغبين في إلقاء التحية؟
مرحباً
حسناً هل أنتِ جاهزة يا جولي لحل هذه المسألة؟
بالطبع.
حسناً دعيني أخبرك شيئاً، بما أنّ يولر تمكن من حل المسألة يمكنك أيضاً أنتِ النجاح في ذلك.
نعم
حسناً جيّد جيد جداً. هذا هو العزم المطلوب. فلنبدأ أولاً أنتِ تنظرين إلى صورة كونيغسبرغ. هذه هي صورة كونيغسبرغ وبإمكانك رؤية الأنهر وإذا تمعّنت في الصورة يمكنك رؤية الجسور هل ترَيْن؟ ثمة بعض الجسور هنا وبعض الجسور هناك وهناك ترَيْن صور مدينة كونيغسبرغ. إذا واجهتِ هذه المشكلة، أقصد أنني سأعرض عليك التحدي تخيلي أنك ذهبت إلى مقهى ستاربكس وجلستِ هناك وكان هناك لافتة في الخارج كُتب عليها أنّ المقهى سيقدّم فنجاناً مزدوجاً ومجانياً من القهوة بالحليب والآيس كريم للزبون الذي يتمكن من اجتياز الجسور الـ ٧ كلها والعودة بعد ذلك إلى نقطة الانطلاق. هذا هو التحدي الذي ستقومين به. هل يمكنك إذاً البدء من مكان محدد واجتياز كل جسر مرة واحدة والعودة مجدداً إلى النقطة التي بدأتِ منها؟
هذا هو التحدي. أخبريني الآن كيف ستبدئين بالتفكير في هذه المسألة؟

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٦:	مسار مُلغَز
الموضوع ٢:	التبسيط

ربما سأحصل على مخطط للمدينة تُحدّد فيه مواقع الجسور.
حسناً

وسأرسمه وأحاول التفكير في المسألة على هذا النحو

حسناً سترسمين إذاً المدينة. هذه صورة عن المدينة هل سترسمين صورة من هذا النوع؟

كلا سأرسم الأساسيات فقط في الصورة فسأستخدم ورقةً بيضاء ومن ثم أرسم الأنهر التي قد أستخدم لوناً مختلفاً لرسمها ومن ثم سأرسم الجسور وينتهي الأمر هنا.
حسناً
نعم

ما فعلته جولي إذاً...وهو أمر رائع بالطبع ما فعلته جولي كان أمراً رائعاً وما فعلته يبيّن أنّه ثمة في هذه الصورة الأساسية للمدينة الكثير من الأشياء التي من الواضح ألا لزوم لها في ما يتعلق بالمسألة المطروحة فلا يهمني مثلاً أين تقع الشوارع ولا يهمني أين تقع كافة المباني فهذه الأشياء غير مهمة. ما يهم هو مواقع الأنهر ومواقع الجسور وبالتالي اتخذت جولي بصورة عفوية خطوةً مهمةً للغاية. وعزلت بالتحديد السمات الأساسية ورسمت صورةً مبسطةً وتبسيط الصورة خطوة كبيرة بالفعل للمضي قدماً. فلننطلق ونرسم هذه الصورة.

وبالمناسبة هذه صورة مبسطة عن المدينة يمكنك رؤية الأنهر هنا والجسور هناك ويمكنك رؤية الجسور الـ ٧ ١ -٢-٣-٤-٥-٦-٧، سبعة جسور ما الذي ستفعلينه في هذه المرحلة؟

حسناً قد أبدأ برسم الخطوط التي تحدد المكان الذي سأنطلق منه وسأحاول حينها أن أبدأ وأن أشق طريقي عبر الجسور لاجتيازها وسأرى أين سينتهي بي الأمر

حسناً، حسناً هل تريدين رسم الصورة على ورقتك وبالترتيب للقيام ببعض التجارب؟ من الرائع دوماً خوض بعض التجارب فإذا جربت شيئاً ما وكنتِ متيقظةً جداً خلال ذلك قد تدركين جيداً ما هو مهم وما هو غير مهم والطريقة التي تبدو لك ناجحةً والطريقة التي لا تبدو لك كذلك وهذا هو مفتاح محاولة حل هذه المسألة.

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٦:	**مسار مُلغَز**
الموضوع ٣:	**كان هذا سريعاً...**

حاولي أن تتكلمي بصوت عال بينما تفكرين في الحل لنتمكن من معرفة ما الذي يجول في بالك.

كنتُ أفكر في نقطة محددة، فكلما كنتَ... أو إذا بدأنا من النقطة د ، هذه هي النقطة د، علينا أن نخرج من هنا ومن هنا في مرحلة معينة لأنه ثمة ٣ جسور وإذا بدأنا بالنقطة د، لا أعتقد أننا سننتهي عند د.
آه
نعم

هذا أمر مثير للاهتمام

والأمر نفسه ينطبق على النقطة أ لأنه ثمة ٤ جسور تبدأ من اليابسة وعلى النقطة ت إذ ثمة ٥ جسور وعندها سنخرج من جديد مراراً وتكراراً وإذا كان عدد الجسور ٣، سنخرج مراراً وتكراراً ما الذي تستنتجيه إذاً؟

أرى أنّه من المستحيل عبور كافة الجسور والعودة في النهاية إلى النقطة التي انطلقنا منها

نعم أنتِ عزلتِ إذاً سمةً بيّنت لي أنّك لا تستطيعين القيام بذلك لنتبع الآن خطوة تبسيط أخرى هل يمكنك أخذ رسم الجسور واليابسة هذه وتبسيطها بصورة إضافية؟

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٦:	مسار مُلغَز
الموضوع ٤:	جوهر مسألة جسور كونيغسبرغ

لقد ذكرتِ كلمةً بينما كنتِ تعملين على حل المسألة قلتِ بالتحديد النقطة أ، النقطة ب، النقطة ج، النقطة د. وقلتِ إذا بدأنا من النقطة أ. وبالتالي هل من الضروري لـ "ا" أن تكون كتلةً كاملةً أو مجرد نقطة فحسب؟ ومن ثمّ لِم لا تلونين الجسور بالأسود؟

لأنّه في هذه الصورة لُونت الجسور بالأسود والنهر بالأحمر يمكنك إذاً الذهاب من النقطة أ إلى النقطة ب من خلال طريقَيْن
طريقان إذاً

يمكنك الذهاب من "أ" إلى "ج" من خلال طريق واحدة ومن"ب" إلى "د" من خلال طريقَيْن ومن "ج" إلى "د" من خلال طريق واحدة
هذا رائع
و "د" و "ج".

هذا رائع. حسناً. وبالمناسبة ما وصلت إليه حتى الآن رائع فعلاً فمن خلال ما فعلته أثبتت أنّ شكل اليابسة عند النقاط "أ" و"ب" و"ج" و"د" غير مهم

هو غير مهم

فالسمة الأساسية هي ماهية النقاط التي تتصل ببعضها البعض فالجسر يسمح لك بالذهاب من النقطة "ا" إلى النقطة "ب" وثمة جسران يذهبان من "أ" وحتى "ب"، وبالتالي ما قمتِ به هو تبسيط المسألة بصورة إضافية وبالتالي ينطوي أحد المواضيع الأساسية الخاصة باستراتيجية اليوم على العثور على الجوهر ومحاولة تبسيط وفهم ما هو بالضبط السبب وراء كلّ ما تقومين به وفي هذه الحالة قلتِ حسناً. إنّ السمة المهمة في هذا اللغز بأكمله هي تحديد المواقع أ، ب، ج، د ولديك من بينها بعض المواقع المتصلة ببعضها

حسناً

وما رسمته هنا لا يشمل إلا نقاطاً وأقواساً وحوافاً.

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٧:	التعثر: واقع التقدم
الموضوع ١:	عزل الرسم البياني

ما عزلته هنا هو شيء يُطلق عليه في علم الرياضيات اسم "**رسم بياني**" والرسم البياني هو ببساطة شيء لديه رؤوس فالنقاط التي حددتها تُسمى رؤوس ومن ثم حواف. أما الحافة فهي كلّ رأسين متصلين ببعضهما البعض هذا ما يُطلق عليه اسم الحافة وما بينته لنا هنا هو أنه إذا كان لديك. بالمناسبة يُسمى هذا رسماً بيانياً، فإذا كان لديك رسم بياني من أربعة رؤوس والرأس أ يتصل بالرأس ب مرتين وبالنسبة إلى الرأس ج فإن "ج" و "ب" متصلان ببعضهما مرة واحدة و"ب" و "د" متصلان ببعضهما مرتَّين و"د" متصلة بـ "ج" ما هو، في هذا الرسم البياني، تحدي كونيغسبرغ المرتبط بهذا الرسم البياني

إذاً

بالمناسبة؟ هو بدأ من أي نقطة؟

لحظة

عبر كل حافة؟

نعم

وانتهى عند النقطة نفسها؟

هذا صحيح لذا يتوجب عليك في الواقع رسمه

نعم

عليك رسم الرسم البياني ومن ثم عليك اجتياز الرسم البياني والمرور بكل حافة مرة واحدة بالضبط والعودة إلى النقطة التي بدأت منها. أخبريني الآن ما هو المنطق الذي بيّن لك أنك لا تستطيعين القيام بذلك. لنفترض أنك بدأت من النقطة أ. لديك ثلاث طرق للخروج من النقطة أ أو الذهاب إلى النقطة أ.

نعم

يمكنك المغادرة إذاً باستخدام أحد هذه الطرق ويمكنك العودة من خلال طريق آخر والمغادرة مجدداً من طريق آخر

صح

وبما أنّ هدفك هو الانتهاء من حيث بدأت لن يكون الأمر ممكناً لأنك كلما اجتزت هذه الجسور الثلاثة ينتهي بك الأمر في الخارج

نعم

حسناً. جيد جداً. هل تعتقدين أنه بالإمكان البدء من رأس آخر، والعودة إليه؟

للرأسين "أ" و "د" العدد نفسه من طرق الخروج والدخول وكذلك الأمر بالنسبة إلى الرأس "ج". ولكن للرأس "ب" خمسة طرق وبالتالي إذا كان هناك رأس يمكن الانطلاق منه والانتهاء عنده فلعله الرأس ب. ولكن مجدداً وإذا استخدمنا المنطق وأخذنا بالاعتبار أنّ لدينا خمسة طرق للخروج وسينتهي بك الأمر إذاً في الدخول أو الخروج، الدخول أو الخروج، الدخول وفي النهاية ستخرجين

حسناً

هل يمكنك الآن تعميم ذلك، ما هو النمط المبيّن؟ ما هو الاستنتاج الذي تتوصلين إليه؟

إذا كان هناك عدد فردي من طرق الدخول أو الخروج

نعم

ينتهي بك المطاف تلقائياً في الخارج

جيّد. حسناً.

وبالمناسبة يُطلق على وصفك لعدد طرق الخروج من رأس ما اسم محدد

لديك فطنة جيدة. ولهذه العملية اسم هي تُسمى **درجة الرأس**

حسناً

ودرجة الرأس هي عدد أطراف الحواف المتصلة

حسناً

بهذا الرأس. هل هذا واضح؟

الدرجة

دعيني أطرح عليك مجدداً السؤال الذي طرحته عليك في السابق واريد منك التفكير فيه

حسناً

حسناً. لنفترض أنك قلت إنّه لرأس الشكل الهندسي أ درجة تساوي ٣ وأنني طرحت عليك السؤال التالي لنفترض أنّني لم أريك كيف يبدو الجزء المتبقي من الرسم البياني بل أريتك أنّ لديه ٣ حواف

حسناً

هل يمكنك ان تعرفي ما إذا كان بإمكانك اجتياز الرسم البياني والعودة إلى النقطة التي انطلقت منها من خلال النظر فقط إلى ما يحدث على مستوى الرأس أ الذي تساوي درجته ٣؟ أو هل لا بد لك من رؤية ما يحدث على مستوى كافة الرؤوس الأخرى أيضاً؟

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٧:	التعثر: واقع التقدم
الموضوع ٢:	توضيح السؤال

لا أعتقد أنّ الجزء المتبقي من الرسم البياني يهمّ

لم لا؟

كما قلت أعتقد أنّ الزوايا الفردية تضعك في النهاية في الخارج بعيداً عن النقطة التي انطلقت منها ما لم وعلى سبيل المثال. لا نعرف كيف يبدو الجزء المتبقي من الرسم البياني

هذا صحيح. أنت لا تعرفين كيف يبدو الجزء المتبقي من الرسم البياني

لنفترض أنّك بدأت عند رأس الشكل ×. هل هذا واضح؟ بدأت من النقطة × ومضيت قدماً، ما هي الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها عن قدرتك على البدء من النقطة × والعودة إلى × واجتياز كل حافة مرة واحدة بالضبط؟ هل يمكن القيام بذلك برأيك؟

لا أعتقد ذلك.

حسناً، ما سبب ذلك؟ لم لا؟ أخبريني الآن ما هو السؤال الذي طرحته عليك؟

بالمناسبة غالباً ما تشمل الأمور الأساسية في مناقشة الرياضيات وفي مناقشة اي شيء آخر أيضاً ضرورة تذكير نفسك بماهية السؤال بالضبط لأن هذا الأمر يحدث فرقاً كبيراً فلنسأل أنفسنا: هل نتحدث بالفعل عن المسألة نفسها؟

لأنه مع مرور الوقت قد ننسى ما هي الفرضية بالتحديد

هيا إذاً ما هو السؤال بالضبط؟

لدينا نقطة واحدة أو رأس شكل هندسي رأس شكل هندسي. لدينا رأس شكل واحد ولهذا الرأس ٣ حواف ونريد أن ننطلق من هذا الرأس ونجتاز كافة الحواف الـ ٣ لنعود في النهاية إلى الرأس نفسه

حسناً. نعم. هل تعنين أنّك تريدين البدء من رأس الشكل الهندسي هذا؟

نعم.

حسناً. وما الذي استنتجته؟ هل يمكنك القيام بذلك؟

كلا.

كلا. حسناً. صحيح. لأنك قلت إنّك ستغادرين أولاً ومن ثم ستعودين لتغادري من جديد وطرحت عليك السؤال التالي: لنفترض أنني مجدداً قلت لك إنه ثمة رأس شكل هندسي بزاوية تساوي ٣ على غرار النقطة أ ولكن من دون أن أريك الجزء المتبقي من الرسم البياني وما يحدث على مستوى هذا الجزء ولكنني سألتك ما إذا كان من الممكن لك البدء من رأس آخر واجتياز كامل الرسم البياني والعودة في النهاية إلى الرأس نفسه؟

نعم.

هل تعتقدين أن هذا ممكن؟ حسناً.

هل يمكنك أن ترسمي لي رسماً بيانياً تحددين فيه الرأس أ بزاوية تساوي ٣ ومن ثم القيام بأي شيء ترغبين فيه في بقية الرسم البياني؟ هل تتحدث عن هذا الرسم البياني بالضبط؟

كلا.

قلت أي رسم آخر لا بد فقط من الأخذ بالاعتبار أنّ للرأس أ زاوية تساوي ٣

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٧:	التعثر: واقع التقدم
الموضوع ٣:	حكمة بيينغ

لربما يجب عليّ القيام برسم آخر؟
حسناً
رسم عشوائي؟

أريد أن أقدم بعض التعليقات على عملك ونهجك. وسأتحدّث إليك لكي تسمعي تعليقاتي ما كانت تفعله جولي هو محاولة حلّ مسألة محددة. وقد كانت المسألة التالية: إذا كان لديك رأس شكل هندسي بدرجة تساوي ٣ داخل رسم بياني ما. هل يمكنك الانطلاق من رأس آخر واجتياز كامل الرسم البياني والعودة إلى الرأس نفسه في النهاية؟ وقد رأت أنه بإمكانها القيام بذلك وأمضت كامل وقتها المخصص للعمل وهي تحاول إثبات إمكانية رسم هذا الرسم البياني.

كان لدي مرشد عندما أتيت في البداية إلى جامعة تكساس منذ عدة سنوات. فقد أتيت إلى هنا للعمل مع عالم رياضيات شهير جداً يدعى ر.ه. بينغ وقد كان عالماً شهيراً في الهندسة اللاكمية وأثبت الكثير من المسائل غير المحلولة ويعود أحد أسباب نجاحه إلى ما يلي. كان يقول إنّه حين لا يُعثر على إجابة لمسألة ما، علماً أنه كان يعمل على مسائل لم يجِب عليها أحد تكون هذه المسألة محلولةً ولكنك لا تعلم الإجابة.

كلا

بلا ولكنه كان يعمل على مسائل لم يحلها أحد وقال إنه من الهم جداً أن تأخذ بالاعتبار أنّ الإجابة قد تكون صح أم خطأ وهو بالتالي لم يكن لينظر إلى الإجابة على أنّها صح وأنه سيعمل فحسب على إثبات هذا الأمر بل يمضي بصورة منهجية ساعتَيْن من الوقت في محاولة إثبات أنّ الإجابة هي صح، ومن ثم ساعتَيْن في محاولة إثبات أنّ الإجابة هي خطأ بغض النظر عما يقوله له حدسه فعندما لا تكون على بينة من شيء ما قد يقودك حدسك إلى الانحراف عن المسار الصحيح وبالتالي ولتجنب الانجرار وراء حدسك، تنطوي الاستراتيجية الجيدة جداً على عدم تكريس نفسك بالكامل لاتجاه واحد من السؤال. وبالمناسبة لا ينطبق هذا الأمر على المسائل الرياضية وحسب وإنما على المسائل الخاصة بالمجتمع والسياسة وأي شيء آخر.

وإذا فكرتِ في الجانبَيْن على حد سواء وحاولتِ بالفعل رؤية نقاط قوة وضعف هذّيْن الجانبَيْن في آن وحتى لو توصلتِ في النهاية إلى إثبات صحة رأيك الذي قدمته في البداية ستكونين قد اكتشفت المزيد من الحقائق عنه من خلال العمل على الجانب الآخر من المسألة. وتنطوي إذاً إحدى الخطوات الاستراتيجية التي يصعب على الأفراد القيام بها على العمل بوضوح وبالتحديد على جانب واحد من السؤال ومن ثم على الجانب الآخر بالتناوب وهذا ما غالباً يفتح الأبواب أمام آفاق جديدة أما اقتراحي لك فهو التالي، كما ترَيْن أنا لا أقدم لك أبداً المساعدة في المسائل الرياضية بل أعطيك تلميحاً فحسب عن استراتيجية تفكير محددة. ولكن وبعد أن

حاولت بعض الشيء العثور على مثال يثبت صحة رأيك وبعد أن وقعت في بعض المطبات هل يمكنك حالياً أن تقولي: "أراهن على أنّ هذا مستحيل والتحقق من السبب المرتبط بذلك؟"

وبالمناسبة قد لا تنجحين في ذلك ولكنك قد تتوصلين إلى بعض الأفكار التي تساعد على رسم مثال على ذلك وبالتالي نحن لا نعرف كيف ستكون النتيجة ولكن دراسة الجانب الآخر قد تكون مفيدة لنا.

حسناً

هل أنتِ موافقة؟ هل ستحاولين الآن أن تثبتي أنّ الإجابة خطأ؟

نعم

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٧:	**التعثر: واقع التقدم**
الموضوع ٤:	**ما هي المسألة؟**

فلنراجع المسألة ما هو السؤال الذي تعملين على حله الآن؟

حسناً

لدي نقطة واحدة، رأس واحد

حسناً

لديه ثلاث حواف وهو محدد على رسم بياني وهذا هو الشيء الوحيد الذي أعرفه عن هذا الرسم البياني والسؤال هو التالي: "إذا بدأتُ من أي نقطة أخرى بخلاف الرأس الذي أعرفه هل يمكنني العودة في النهاية إلى الرأس نفسه الذي بدأت منه بعد عبور كافة الجسور أو كافة الحواف

حسناً

وحالياً أحاول أن أثبت أنّ الإجابة هي خطأ

حسناً

لأنني حاولت أن أثبت أنها صح ولم أتوصل إلى أي نتيجة ولم ينجح الأمر

نعم

حسناً. حسناً حاولت أن تقدمي مثالاً حاولت رسم مثال جيّد

نعم

ولكن الأمر لم ينجح وتحاولين الآن أن تثبتي أنّه من المستحيل التوصل إلى رسم هذا الرسم البياني

نعم

حسناً. كيف ستقومين بذلك؟

أعتقد أنّ الأمر يتعلق بعدد الدرجات الرأس "أ"

حسناً

ولا يهمّ ما الذي يحدث في الأسفل

حسناً فأنت ستبدأين من نقطة أخرى

نعم

ستعبرين أحد الجسور للوصول إلى النقطة "أ" هل تريدين رسم ذلك؟

بالطبع

أو يمكنك... حسناً

يجب عليك إذاً عبور أحد الجسور للوصول إلى النقطة أ. بعض الجسور

عليك عبور كافة الجسور

هذا صحيح

وعليك عبور أحد الجسور كطريق خروج

نعم

ومن ثم في مرحلة معينة عبور كافة الجسور لا بد لك من عبور هذا الجسر الثالث، للقيام بأي شيء...

نعم

عبور هذا الجسر الثالث للعودة إلى النقطة أ ومن ثم لا يكون لديك أي طريق للخروج

آه! هذا رائع! رائع ما الذي تستنتجينه إذاً؟

أستنتج أنّه إذا كان هناك نقطة محددة مع ثلاث حواف أي رأس مع ثلاث حواف وبدأت من أي نقطة أخرى لا يمكن العودة في النهاية إلى النقطة نفسها

طيّب.

ونحن نعلم أيضاً أنه في حال البدء من هذه النقطة لا يمكن الانتهاء عند النقطة نفسها أيضاً

آه حسناً. والآن أريد منك تعميم هذا الاستنتاج بقدر الإمكان إذا كان لديك رأس لربما فيه عدد حواف فردي لربما أو بصورة مؤكدة؟

حسناً أنا لست متأكدة لأنني لم أطبق ذلك على العددَيْن خمسة أو سبعة

حسناً

ولكنني أفكر أنّه وإذا كان هناك ضمن رسم بياني محدد رأس واحد لديه عدد فردي من الحواف يستحيل حينها البدء من أي نقطة أخرى والعودة في النهاية إلى النقطة نفسها

جيد جداً

حسناً

جيد جداً.

إذا كان لدينا رسم بياني محدد... ما سنقوم به هو التفكير في إعادة صياغة المسألة في الاتجاه الإيجابي

حسناً

لنفترض أنني قلت لك إنّه هناك رسم بياني يمكن اجتيازه من دون المرور بالحافة نفسها مرتين مع البدء من رأس محدد واجتياز كل حافة مرة واحدة بالضبط والعودة من جديد إلى المكان الذي بدأنا منه

نعم

ما الذي يمكنك قوله عن هذا الرسم البياني؟ ما الذي يمكن أن يكون صحيحاً في ما يتعلق بهذا الرسم؟

أنه ما من أي نقطة ...أو أنه ليس لدى جميع النقاط ثلاث حواف تخرج منها أو عدد فردي من الحواف

حسناً

قولي لي إذاً ما هو الصحيح في هذا الرسم البياني أنه

قلتِ لي ما هو غير صحيح

هل يمكنني القول إنه لكافة النقاط عدد مزدوج من الحواف التي تخرج منها؟

صحيح

حسناً

هل هذا واضح؟

نعم

جيد. رائع

حسناً!

هذا رائع.

لقد توصلت الآن إلى الاستنتاج التالي: عندما يكون من الممكن البدء من نقطة محددة في الرسم البياني وعبور كلّ حافة مرة واحدة بالضبط والعودة مجدداً إلى النقطة التي بدأنا منها يجب أن يكون لكل رأس فردي حينها درجة زوجية، هل هذا صحيح؟

صحيح

وبالمناسبة ذكرت الحواف التي تخرج من الرأس الهندسي

نعم

ونحن نتحدث عن فكرة الدرجات وبالمناسبة خلال تطوير الأفكار من الشائع أن يبدأ المرء من فكرة غامضة نوعاً ما وتصبح أكثر تحديداً بينما يفكر بأوضاع محتملة من المحتمل أنه لم يفكر فيها سابقاً للانطلاق منها فلننظر في هذا.

لنفترض أنّه لديك حافة تخرج من أحد الرؤوس وتعود في الوقت عينه إلى هذا الرأس نفسه أي بعبارة أخرى حلقة تكرار

نعم

لدى احتساب الدرجة هل ستعتبرينها حافة واحدة أو حافتَيْن وبمعنى آخر، إذا كان هذا الوضع ينطبق على المسألة هنا أقصد إذا كان هناك رسم بياني ولديه بعض الحواف التي تخرج منه ولديه حلقة تكرار هنا كم تساوي درجة هذا الرأس؟ وما سبب ذلك؟

الأسبوع السادس:	ميزة أويلر
المحاضرة ٧:	التعثر: واقع التقدم
الموضوع ٥:	إعداد رسم بياني

أقول ٤

حسناً لم قلت ٤ وليس ٣؟

ثمة ٣ حواف فحسب ولكن أحدها حلقة تكرار

لِم تعتقدين إذاً أنه من الأفضل القول إن الزاوية تساوي ٤ عوضاً عن ٣؟

لأنّه ثمة ٤ نقاط

أو لديك ٤ اتجاهات يمكنك من خلالها الخروج من هذا الرأس أو الوصول إليه؟

نعم

حسناً وماذا عن الدليل الذي أعطيته حول ما قلته إنّه إذا كان بالإمكان اجتياز رسم بياني ما يكون لكل رأس زاوية زوجية؟

نعم لأنه- آه مهلاً

إذا كان لهذا الرسم إذاً عدد زوجي من الزوايا يمكنك في النهاية الوصول إلى النقطة نفسها؟

حسناً ما قلته هو أنه وإذا كان لدينا رأس بزاوية زوجية

نعم

يستحيل اجتياز الرسم البياني والعودة إلى النقطة التي بدأنا منها

حسناً

ولكن في هذه الحالة قلنا إنّ عدد الزوايا ٤؟

نعم

حسناً نعم. وإذا بدأت من هذه النقطة، نعم من الممكن قد يكون الأمر ممكناً لا نعرف لأننا لا نعرف كيف يبدو الجزء المتبقي من الرسم البياني ولكن هذا الأمر لا ينفي إمكانية ذلك

ولكن نعم، حسناً

وبالمناسبة، هذه هي الطريقة التي غالباً ما تُطور الأفكار من خلالها فإذا كان لديك فكرة تدرسينها من جانب عام ومن ثم يكون هناك بعض التفاصيل التي يجب تسويتها وهذا ما تفعلينه تتأكدين من الأمر ومن ثم تقولين آه لدي حلقة تكرار كيف سأتعامل مع الأمر كيف سأتعامل مع حلقة تكرار مختلفة بعض الشيء عما كنا نتحدث عنه سابقاً؟ ومن ثمّ تتعاملين معها وتدرسين ما يناسب الرسم البياني الذي كنت تطورينه من قبل وبالتالي هذه هي إحدى السمات التي تكون مرتبطةً دوماً باستيعاب مفهوم ما بصورة أكثر دقةً

حسناً

وما نحاول فعله الآن هو تحديد الرسوم البيانية التي يمكن اجتيازها والرسوم البيانية التي لا يمكن اجتيازها وحتى الآن حدّدنا رسوماً لا يمكن اجتيازها صحيح؟

بالضبط

حددنا معياراً جيداً للرسوم التي لا يمكن اجتيازها قلنا إنّه إذا كان هناك رسم بياني فيه رأس بزاوية فرديةٍ لا نستطيع اجتيازه لأنه لا يمكننا البدء من رأس شكل هندسي والمرور بكافة الحواف والعودة إلى الرأس نفسه أليس كذلك؟

نعم
هل لديك إذاً أي تخمين بشأن الرسوم البيانية التي يمكنك اجتيازها.
في الواقع، بناءً على ما تقدم، يجب أن يكون للرسوم البيانية عدد زوجي من الزوايا يجب أن يكون لكل رأس عدد زوجي من الزوايا
وبالمناسبة لا نقول عدداً زوجياً من الزوايا نقول زاوية زوجية زاوية زوجية؟
حسناً نعم زاوية زوجية
يكون إذاً لكل رأس زاوية زوجية؟
نعم
وهل يمكن برأيك اجتياز اي رسم بياني بهذه الخاصية؟ أو قد يكون هناك بعض الرسوم البيانية التي يمكنك اجتيازها وبعض الرسوم الأخرى التي لا يمكن اجتيازها؟
طيّب ثمة بعض الرسوم التي لا يمكن اجتيازها
هل تعتقدين ذلك؟
نعم
حسناً كيف سنحل هذه المسألة الآن؟ ولكن هذه مسألة لا تعرفينها بعد، صحيح؟
هذه معضلة
نعم قد يكون الأمر ممكناً إذا كان لكل رأس زاوية زوجية وربما يمكنك دوماً القيام بذلك أو ربما لا
جيّد
حسناً كيف سنحل هذه المسألة؟
يمكننا القيام بالأمر نفسه الذي كنا نقوم به ورسم رسوم
حسناً
هذه فكرة جيدة لِم لا تبدئين برسم رسم بياني حيث يكون لكل رأس زاوية زوجية أراهن على أنه يمكنك توسيع هذا الرسم. بالمناسبة، هذه بداية فقط، ورسم رسم بياني حيث يكون لكل رأس زاوية زوجية يمكنك تعقيد الرسم بعض الشيء للمرح فقط ويمكنك وضع رأس شكل هندسي في الوسط هنا لكي لا يكون طويلاً جداً
نعم
سأطرح عليك سؤالاً
تفضل
عندما كنت ترسمين هذه الأمثلة كنت تصادفين أحياناً عدداً فردياً من الرؤوس مع زاوية فردية؟
نعم
هل كان من الممكن رسم مثال لديه رأس واحد فقط مع زاوية فردية؟

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٧:	**التعثر: واقع التقدم**
الموضوع ١.٦:	**تذكير بالعناصر**

حسناً لدى التفكير في رسم رسم بياني محدد أقصد لدى رسمه بالفعل تستخدمين قلم الرصاص وترسمين حافةً. صحيح؟ هل يمكنك أن تفكري في ما يحدث عندما ترسمين حافةً؟ لديك نقطتان عند الطرفَيْن.

نعم

ما الذي تستنتجينه حيال ذلك؟

أعتقد أنّنا هنا بحاجة إلى توضيح البيان وتوضيح الدليل. فإذا ما تمكّنت من توضيح البيان والدليل معاً يصبحان واضحَيْن معاً.

وبالمناسبة هذه إحدى الحقائق الأساسية في أي شيء تقومين به. وهو الوقت الذي تصبحين فيه قريبةً جداً من الإجابة. فغالباً ما يجري التوصل إلى حل للسؤال تماماً في الوقت عينه الذي يتضح فيه السؤال أمامك إلى أبعد الحدود. مع تخصيص الوقت للتمعن بدقة في ما تحاولين إثباته وبالمناسبة في البداية قد لا تكونين على بينة مما نحاول إثباته. أنت تجربين فحسب وتتعثرين ولا بأس بذلك. ولكنك تصلين في النهاية إلى نقطة محددة تجعلك تقولين نعم أعتقد أنّ هذا الأمر صحيح تماماً. وعندما تقولين إنّ هذ ا الأمر صحيح تماماً تكونين في الغالب في موقع تثبتين من خلاله أنه صحيح. وفي هذه الحالة، قمت ببعض التجارب من خلال رسم الرسوم البيانية، وما هو القول والاستنتاج اللذَيْن توصلت إليهما؟

نحن نبحث عن بعض الاستنتاجات بشأن زوايا الرؤوس.

هل لديك أي فرضية بشأن الحقائق الصحيحة المرتبطة بزوايا الرؤوس في أحد الرسوم البيانية الاعتباطية؟

الأسبوع السادس:	**ميزة أويلر**
المحاضرة ٧:	**التعثر: واقع التقدم**
الموضوع ٢.٦:	**العودة إلى المسار الصحيح**

هذه الدرجة زوجية وهذه فردية وهذه فردية وهذه زوجية. وإذا جمعناها كلّها معاً تبقى كلّها زوجيةً. ما هي فرضيتك إذاً بشأن ذلك بعد أن نرسم خطاً محدداً ونجمع كافة الدرجات معاً سنحصل على عدد زوجي
نعم

نعم. ما الذي يمكنك قوله عن الرؤوس ذات الأعداد الفردية وذات الدرجات الفردية؟ ما هو عدد الرؤوس المماثلة التي يمكن أن يحتويها الرسم؟ هل يمكن أن يحتوي على رأس واحد على سبيل المثال؟
كلا يجب أن يحتوي على رأسَيْن

ما سبب ذلك؟ ما السبب الذي يحول دون احتوائه على رأس واحد؟

عندما نرسم خطاً، يكون العدد الإجمالي دوماً زوجياً. وإذا كان هناك رأس ذات درجة فردية يجب أن يكون هناك رأس واحد آخر أيضاً في الجزء المتبقي من الرسم بالدرجة الفردية لجمع الرأسَيْن معاً والحصول على عدد رؤوس زوجي

صحيح جيد جداً، حسناً ما هو عدد الرؤوس ذات الزوايا الفردية التي يجب أن يحتوي عليها الرسم؟ أعني التي يمكن أن يحتويها الرسم؟
عدد زوجي

عدد زوجي صحيح. يجب أن يكون لديك عدد زوجي من الرؤوس ذات درجات فردية. وقد أثبت الآن أنّ الدرجة الإجمالية، وبالمناسبة هذا مصطلح فني، الدرجة الإجمالية هي فقط مجموع زوايا كافة الرؤوس. قلت أنّه يجب أن تكون زوجيةً هل يمكنك أن تفكري في سبب صحة ذلك؟ كنتِ قد تحدثت نوعاً ما عن الموضوع هل يمكنك أن توضحي سبب صحة هذا الأمر؟

قد أكرر نفسي. كلما رسمنا حافةً
نعم
نحصل على رأسين وفي هذه المرحلة، تكون درجة كل رأس فرديةً
حسناً هذا إذا كنا نتحدث عن الحافة الأولى
نعم
نعم. وكلما أضفت حافةً من رأس قائم ستزيد الدرجة.
ستزيد الدرجة برقم واحد في ما يتعلق بأحد الرؤوس القائمةومن ثم سترسمين حافة جديدة أو تضفين حافة أخرى
وفي كل مرة نرسم فيها خطاً نضيف ٢ على الدرجة

صحيح

فكل طرف من الحافة يضيف ١ إلى الدرجة وحتى ولو كانتا متصلَين بالرأس نفسه، هذه مجرد حلقة تكرار ومن ثم تضيف ٢ على الدرجة

حسناً هذا صحيح لكل حافة طرفان وفي أي وقت تضيفينها تضيفين على الدرجة الإجمالية العدد ٢
نعم
جيد جداً
نعم

ها قد توصلت مجدداً إلى استنتاج هنا أهذا صحيح؟ أنه ينبغي على عدد الرؤوس ذات الدرجات الفردية أن يكون زوجياً لأنه ينبغي على الدرجة الإجمالية للرسم البياني أن تكون زوجيةً فعندما كنتِ ترسمين رسمتك لتوضحي المسألة التي تتمحور حول ما إذا كان بالإمكان اجتياز رسم بياني إذا ما عثرت على رأس بدرجة فردية كان يمكنك أن تكوني على ثقة بأنّه سيكون هناك رأس بدرجة فردية في مكان ما آخر وبالتالي يكون باستطاعتك حينها وصلهما ببعضهما البعض للحصول على عدد زوجي من الرؤوس .